Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS Métiers de l’eau, Groupement D2

Session 2025 • Code sujet : **25MATGRD2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l’oxygénation d’un bassin d’aération (14 questions) **Page 3**

2. Contrôle du calibrage et du remplissage d’ampoules (11 questions) **Page 8**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 8-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'oxygénation d'un bassin d'aération

Dans une station d'épuration à boues activées, le dioxygène insufflé dans un bassin permet aux micro-organismes de dégrader les matières polluantes. L'exercice modélise l'évolution de la concentration pendant l'aération, puis étudie le transfert et la concentration moyenne de dioxygène.

Partie A

Question 1. À partir du nuage de points représentant la concentration en dioxygène en fonction du temps, expliquer graphiquement pourquoi un ajustement linéaire ne paraît pas approprié.

Le nuage suit une courbe croissante qui s'aplatit : au début, la concentration augmente rapidement, puis elle progresse de moins en moins. Les points ne sont donc pas disposés autour d'une droite et le taux d'augmentation n'est pas constant. Graphiquement, la concentration tend plutôt vers une valeur de saturation. Un ajustement linéaire ne décrit pas correctement cette évolution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nuage est courbe et s'aplatit : un ajustement linéaire n'est pas approprié.

Question 2. Compléter les deux valeurs manquantes u et v du tableau des valeurs de $y_i = \ln(10{,}54 - C_i)$, arrondies à 10^{-3}.

Valeur manquante	Calcul	Arrondi à 10^{-3}
u	$\ln(10{,}54 - 7{,}063)$	1,246
v	$\ln(10{,}54 - 9{,}215)$	0,281

On applique la définition de y_i aux concentrations des temps 8 min et 16 min, puis on arrondit au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> u = 1,246 et v = 0,281.

Question 3. À l'aide de la calculatrice et de la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $(t_i ; y_i)$ sous la forme $y = at + b$, avec a et b arrondis à 10^{-3}.

Coefficient	Valeur arrondie à 10^{-3}
a	−0,136
b	2,354

La régression des onze couples $(t_i ; y_i)$, en utilisant les valeurs du tableau arrondies au millième, donne ces coefficients. L'équation de la droite d'ajustement s'écrit donc $y = at + b$ avec ces valeurs de a et b.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La droite d'ajustement est $y = -0{,}136t + 2{,}354$.

Question 4. En utilisant l'ajustement $y = -0{,}14t + 2{,}35$ et la définition de y, déduire que $C(t) = 10{,}54 - Ae^{-0{,}14t}$, puis donner la valeur de A arrondie à 10^{-2}.

Comme $y = \ln(10{,}54 - C(t))$, l'ajustement donne $\ln(10{,}54 - C(t)) = -0{,}14t + 2{,}35$. En exponentiant, on obtient $10{,}54 - C(t) = e^{2{,}35}e^{-0{,}14t}$. Ainsi, $C(t) = 10{,}54 - Ae^{-0{,}14t}$, avec $A = e^{2{,}35}$. On arrondit A au centième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

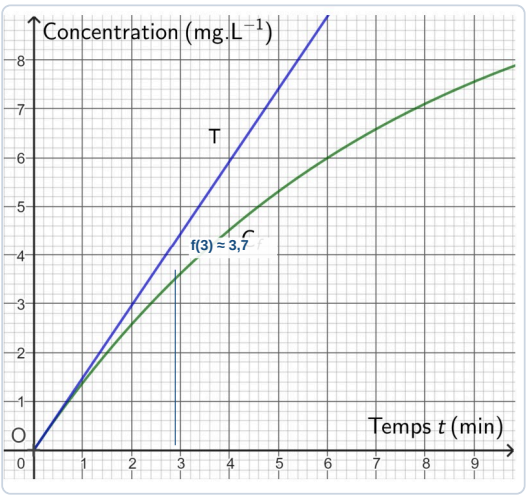
$A \approx 10{,}49$, donc $C(t) = 10{,}54 - 10{,}49e^{-0{,}14t}$.

Partie B

Question 1.a. À l'aide de la représentation graphique en annexe, déterminer graphiquement f(3) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Sur l'annexe, on repère t = 3 min sur l'axe horizontal, puis on lit l'ordonnée du point de la courbe C_f correspondant. Cette lecture graphique, nécessairement approximative, donne environ 3,7 mg·L⁻¹. Dans le contexte, après trois minutes d'aération, la concentration en dioxygène de l'eau est donc proche de 3,7 mg par litre.

Lecture graphique de f(3)



✓ RÉPONSE À RETENIR

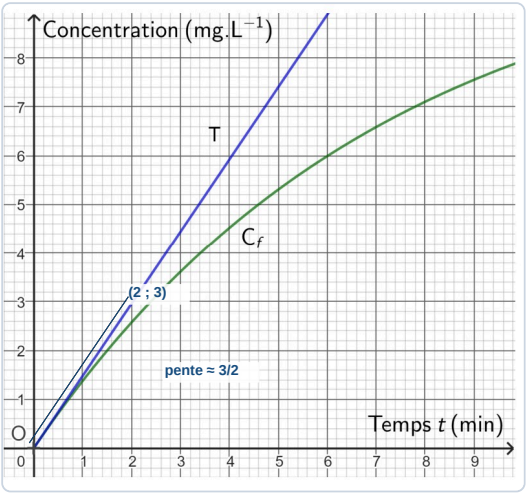
$f(3) \approx 3{,}7$ mg·L⁻¹.

Question 1.b. **Expliquer comment obtenir graphiquement f′(0) ≈ 1,5 à partir de la tangente à la courbe à l'origine.**

1. La dérivée f′(0) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
2. On lit sur cette tangente deux points, l'origine et le point de coordonnées approximatives (2 ; 3). Son coefficient directeur est donc (3 − 0)/(2 − 0) = 1,5.

La pente de la tangente fournit ainsi la valeur demandée graphiquement.

Pente de la tangente à l'origine



✓ RÉPONSE À RETENIR

La tangente a pour pente environ 1,5, donc f′(0) ≈ 1,5.

Question 2.a. **Sachant que f(t) = 10,54(1 − e^{-kt}), justifier par le calcul que f′(0) = 10,54k.**

On dérive f(t) = 10,54(1 − e^{-kt}). La dérivée de e^{-kt} est −ke^{-kt} ; le signe moins dans la parenthèse transforme donc ce terme en +ke^{-kt}. Ainsi, f′(t) = 10,54ke^{-kt}. En prenant t = 0 et en utilisant e^{0} = 1, on obtient f′(0) = 10,54k.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f′(0) = 10,54k.

Question 2.b. **Déduire des questions précédentes une valeur approchée du réel k.**

La lecture graphique donne f′(0) ≈ 1,5. Or le calcul précédent établit f′(0) = 10,54k. On égalise donc ces deux expressions et on isole k : k ≈ 1,5/10,54. Comme t est mesuré en minutes et que kt apparaît dans l'exponentielle, k s'exprime en min^{-1}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

k ≈ 0,142 min^{-1}.

Question 2.c. Indiquer si la modélisation par f et la valeur obtenue pour k sont cohérentes avec la fonction C obtenue à la question 4 de la partie A.

La fonction de la partie A tend vers 10,54 mg·L^{-1} et utilise l'exponentielle $e^{-0,14t}$. Dans la partie B, f tend également vers 10,54 mg·L^{-1}, et k ≈ 0,142 min^{-1} est proche de 0,14. Les deux modèles décrivent donc une concentration de saturation identique et une évolution de vitesse voisine. Ils sont cohérents.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : même saturation, 10,54 mg·L^{-1}, et coefficients exponentiels proches, 0,14 et 0,142.

Question 3. À l'aide de la relation $AH_s = k \times C_s \times V$, avec $C_s = 0,01054$ g·L^{-1} et V = 700 000 L, déterminer une valeur approchée de la quantité de dioxygène transférée par minute, en g·min^{-1}.

Donnée	Valeur utilisée
k	1,5/10,54 min^{-1}
C_s	0,01054 g·L^{-1}
V	700 000 L

On remplace ces valeurs dans $AH_s = k \times C_s \times V$. Les litres se simplifient avec ceux de la concentration ; le résultat est une quantité de dioxygène transférée par minute, en g·min^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $AH_s \approx 1\,050$ g·min^{-1}.

Partie C

Question 1.a. Pour $g(t) = 4,77(1 - e^{-0,09t})$, déterminer la limite de g lorsque t tend vers +∞ et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Quand t tend vers +∞, l'exponentielle $e^{-0,09t}$ tend vers 0. Par conséquent, $g(t) = 4,77(1 - e^{-0,09t})$ tend vers 4,77. Dans le bassin, après la remise en marche de l'aération, la concentration en dioxygène augmente donc vers une saturation apparente de 4,77 mg·L^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite est 4,77 mg·L^{-1}, valeur de la saturation apparente.

Question 1.b. **Déterminer au bout de combien de minutes la concentration en dioxygène atteint 4,293 mg·L⁻¹, soit 90 % de la valeur de saturation apparente, et préciser la méthode utilisée.**

1. On résout $g(t) = 4{,}293 : 4{,}77(1 - e^{-0{,}09t}) = 4{,}293$.
2. Comme $4{,}293 = 0{,}9 \times 4{,}77$, on obtient $e^{-0{,}09t} = 0{,}1$, puis $t = \ln(10)/0{,}09$.

La résolution de cette équation par logarithme donne le temps recherché.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La concentration atteint 4,293 mg·L⁻¹ après environ 25,6 min.

Question 2.a. **Vérifier que $G(t) = 4{,}77t + 53e^{-0{,}09t}$ est une primitive de g sur l'intervalle [0 ; +∞[.**

On dérive $G(t) = 4{,}77t + 53e^{-0{,}09t}$: $G'(t) = 4{,}77 - 53 \times 0{,}09e^{-0{,}09t}$. Or $53 \times 0{,}09 = 4{,}77$, donc $G'(t) = 4{,}77(1 - e^{-0{,}09t})$. Cette expression est $g(t)$ pour tout $t \geq 0$; G est donc une primitive de g sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $G'(t) = g(t)$: G est une primitive de g sur [0 ; +∞[.

Question 2.b. **À l'aide de la formule donnée pour la concentration moyenne pendant les 25 premières minutes et d'une primitive de g, déterminer cette moyenne, arrondie à 0,1 mg·L⁻¹.**

Étape	Expression
Intégrale moyenne	$[G(25) - G(0)]/25$
Remplacement	$[4{,}77 \times 25 + 53e^{-0{,}09\times25} - 53]/25$

La formule de la moyenne s'applique à l'intervalle de 0 à 25 minutes. L'évaluation donne environ 2,873 mg·L⁻¹ ; l'arrondi au dixième est donc 2,9 mg·L⁻¹.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La concentration moyenne est de 2,9 mg·L⁻¹.

2. Contrôle du calibrage et du remplissage d'ampoules

Des ampoules pharmaceutiques sont contrôlées sur leur diamètre de scellage et leur hauteur, modélisés par des variables aléatoires normales indépendantes. L'exercice étudie la conformité d'un prélèvement de 50 ampoules et un test bilatéral sur le volume moyen de remplissage.

Partie A

Question 1. Parmi les courbes I, II et III, identifier celle qui représente la variable aléatoire D, diamètre de moyenne 7,1 mm et d'écart type 0,24 mm, puis justifier le choix.

Une loi normale est représentée par une courbe en cloche, centrée sur son espérance. La courbe de **D** doit donc être centrée en 7,1 mm. Son écart type de 0,24 mm implique une dispersion faible : la courbe est resserrée autour de cette valeur. La courbe III est centrée près de 7,1 et correspond à cette faible dispersion.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe III.

Question 2.a. Déterminer, avec un résultat arrondi à 10^{-3}, la probabilité P(6,48 ≤ D ≤ 7,72).

On centre et réduit les deux bornes avec la moyenne 7,1 et l'écart type 0,24 : $z_1 = (6,48 - 7,1)/0,24 = -2,583$ et $z_2 = (7,72 - 7,1)/0,24 = 2,583$. La probabilité cherchée est donc celle que la loi normale centrée réduite soit comprise entre ces deux valeurs. La lecture à la calculatrice donne, à 10^{-3} près, la probabilité indiquée ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(6,48 \leq D \leq 7,72) \approx 0,990.$

Question 2.b. Déterminer, avec un résultat arrondi à 10^{-3}, la probabilité P(100,6 ≤ H ≤ 104,1), où H désigne la hauteur totale de l'ampoule.

Pour la hauteur, la moyenne est 102 mm et l'écart type 0,7 mm. La borne inférieure donne $(100,6 - 102)/0,7 = -2$, et la borne supérieure donne $(104,1 - 102)/0,7 = 3$. Il suffit donc de calculer $P(-2 \leq Z \leq 3)$, où Z suit la loi normale centrée réduite. Le résultat est ensuite arrondi au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(100,6 \leq H \leq 104,1) \approx 0,976.$

Question 3. En utilisant les probabilités obtenues à la question 2 et l'indépendance de D et H, déterminer la probabilité qu'une ampoule prise au hasard soit correctement calibrée, c'est-à-dire qu'elle respecte simultanément les deux intervalles de tolérance.

Une ampoule est conforme si son diamètre et sa hauteur respectent simultanément leurs intervalles de tolérance. Comme D et H sont indépendantes, la probabilité de conformité est le produit des deux probabilités obtenues en question 2. Avec les valeurs non arrondies, ce produit vaut environ $0,9663$, soit environ 96,6 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité de conformité : $0,966$, soit environ 96,6 %.

Partie B

Question 1. Donner, sans justifier, la loi suivie par X, le nombre d'ampoules correctement calibrées parmi 50, et préciser ses paramètres.

Le prélèvement est assimilé à 50 tirages avec remise. Pour chaque ampoule, la probabilité d'être correctement calibrée est constante et égale à 0,97. Le nombre X d'ampoules correctement calibrées parmi les 50 suit donc une loi binomiale, de paramètres le nombre de tirages et la probabilité de succès.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,97)$.

Question 2. Déterminer l'espérance de X et interpréter cette valeur dans le contexte du prélèvement.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0,97 = 48,5$. Cette valeur ne signifie pas qu'un prélèvement contient nécessairement une demi-ampoule : sur un grand nombre de prélèvements de 50 ampoules, le nombre moyen d'ampoules conformes serait 48,5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 48,5$ ampoules conformes en moyenne.

Question 3. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins quatre ampoules d'un prélèvement de 50 ne soient pas correctement calibrées, situation entraînant l'arrêt de la ligne pour réglage.

Notons Y le nombre d'ampoules non conformes. La probabilité de non-conformité est $1 - 0,97 = 0,03$, donc $Y \sim \mathcal{B}(50 ; 0,03)$. L'arrêt intervient lorsque $Y \geq 4$. On calcule cette probabilité par complément : $P(Y \geq 4) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)]$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \geq 4) \approx 0,063.$

Partie C

Question 1. Sous l'hypothèse H₀ : μ = 10 mL, donner sans justification un réel h tel que P(10 − h ≤ V ≤ 10 + h) ≈ 0,95, à 10⁻² près, sachant que V suit une loi normale d'espérance 10 et d'écart type 0,03.

Pour une loi normale, l'intervalle centré qui contient 95 % des valeurs est approximativement délimité par la moyenne plus ou moins $1,96$ écart-type. La demi-largeur vaut donc $h = 1,96 \times 0,03 = 0,0588$ mL. Arrondie au centième comme demandé, elle vaut 0,06 mL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h = 0,06$ mL.

Question 2. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, la région d'acceptation est l'intervalle centré sur 10 mL contenant environ 95 % des moyennes sous H_0. Sa demi-largeur est $1,96 \times 0,03 \approx 0,06$ mL. On compare la moyenne observée à cet intervalle : si elle y appartient, on ne rejette pas H_0 ; sinon, on rejette H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $v_e \in [9,94; 10,06]$ mL ; la rejeter sinon.

Question 3. À partir de l'échantillon prélevé par le technicien, dont le volume moyen mesuré est 9,67 mL, indiquer si l'hypothèse H₀ peut être acceptée au seuil de 5 % et justifier la décision.

La moyenne observée est $v_e = 9,67$ mL. La région d'acceptation au seuil de 5 % est approximativement $[9,94; 10,06]$ mL. Comme $9,67 < 9,94$, la moyenne mesurée se situe hors de cette région. Le résultat du test conduit donc à rejeter l'hypothèse nulle au seuil de signification de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non. On rejette H_0, car $9,67 \notin [9,94; 10,06]$ mL.

Question 4. Parmi les quatre intervalles A, B, C et D proposés, choisir sans justification la région d'acceptation du test bilatéral au seuil de signification de 1 %.

Au seuil de 1 %, la région d'acceptation doit contenir 99 % des valeurs sous H_0, contre 95 % au seuil de 5 %. Elle reste centrée sur 10 mL et est donc plus large que la région d'acceptation à 5 %. Parmi les quatre intervalles proposés, seul l'intervalle D correspond à cette région élargie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **D :** $[9,92 ; 10,08]$ **mL.**

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2025)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Métiers de l'eau, Groupement D2, session 2025, code 25MATGRD2, d'une durée de 2 heures et de coefficient 1,5. Le sujet porte sur l'oxygénation d'un bassin d'épuration et le contrôle d'ampoules pharmaceutiques. Il évalue les ajustements, les fonctions exponentielles, les probabilités normales et binomiales, ainsi qu'un test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La transformation $y = \ln(L - C)$, ajustée par $y = at + b$, conduit à $C(t) = L - e^{b}e^{at}$.
- Pour $f(t) = L(1 - e^{-kt})$, on a $f'(0) = Lk$ et la limite de f en $+\infty$ vaut L.
- Pour deux variables indépendantes, la probabilité que deux conditions soient satisfaites simultanément est le produit de leurs probabilités.
- Si X suit une loi binomiale B(n,p), son espérance vaut $E(X) = np$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités des concentrations, volumes, temps et débits dans les calculs.
- Pour une lecture graphique, préciser la valeur lue et son interprétation dans la situation étudiée.
- La conformité d'une ampoule exige que le diamètre et la hauteur respectent chacun leur intervalle de tolérance.
- Pour le test bilatéral, comparer la moyenne observée à la région d'acceptation centrée sur la valeur de H_0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer d'un ajustement affine de ln(10,54 − C) à une expression de C(t) ?

On remplace y par ln(10,54 − C) dans l'équation affine, puis on exponentie les deux membres. On obtient $10,54 - C = e^{b}e^{at}$. Il suffit ensuite d'isoler C pour exprimer la concentration en fonction du temps.

Q : Comment déterminer graphiquement la dérivée à l'origine ?

La dérivée en un point est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point. On lit deux points de la tangente, puis on calcule la variation verticale divisée par la variation horizontale. La pente s'exprime ici en concentration par minute.

Q : Comment modéliser le nombre d'ampoules conformes dans un prélèvement de 50 ?

Chaque ampoule correspond à une épreuve de Bernoulli, avec une probabilité de conformité égale à 0,97. Le prélèvement est assimilé à des tirages indépendants avec remise. Le nombre de conformes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,97$.

Q : Comment décider si le volume moyen mesuré est compatible avec l'hypothèse de 10 mL ?

On construit la région d'acceptation bilatérale sous H_0 à partir de la loi de la moyenne et du seuil de signification. Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0 au seuil choisi; sinon, on la rejette.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 8-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.