Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2025 • Code sujet : **25MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la concentration en dioxygène dans un bassin d'aération (14 questions) **Page 3**

2. Contrôle statistique d'ampoules pharmaceutiques (11 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 7-Sujet.pdf

1. Évolution de la concentration en dioxygène dans un bassin d'aération

Dans une station d'épuration à boues activées, le dioxygène insufflé permet aux micro-organismes de dégrader les matières polluantes. L'exercice étudie l'évolution de sa concentration dans le bassin à l'aide de données, d'un ajustement exponentiel, d'une équation différentielle et d'une intégrale.

Partie A

Question 1. À partir du nuage de points représentant le temps t_i et la concentration C_i en dioxygène, expliquer graphiquement pourquoi un ajustement linéaire ne paraît pas approprié.

Le nuage est incurvé : la concentration augmente fortement au début, puis les augmentations deviennent de plus en plus faibles. Les points ne sont donc pas approximativement alignés. Ils suggèrent plutôt un rapprochement progressif vers une valeur de saturation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nuage est incurvé et tend à se stabiliser : un ajustement linéaire n'est pas approprié.

Question 2. Avec $y_i = \ln(10{,}54 - C_i)$, compléter les valeurs manquantes u et v du tableau, arrondies à 10^{-3}.

1. Pour t = 8, u = ln(10,54 − 7,063).
2. Pour t = 16, v = ln(10,54 − 9,215).

On arrondit les deux résultats au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> u = 1,246 et v = 0,281.

Question 3. À l'aide de la calculatrice et de la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage $(t_i\ ;\ y_i)$ sous la forme y = at + b, avec a et b arrondis à 10^{-3}.

La régression linéaire des onze points, avec les valeurs de y arrondies au millième, donne un coefficient directeur d'environ −0,1357 et une ordonnée à l'origine d'environ 2,3542. On arrondit chaque coefficient au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> y = −0,136t + 2,354.

Question 4. En utilisant la droite d'équation y = −0,14t + 2,35 et la définition de y, déduire une expression de C(t) sous la forme $C(t) = 10{,}54 - Ae^{-0{,}14t}$, puis donner A arrondi à 10^{-2}.

La définition donne ln(10,54 − C(t)) = −0,14t + 2,35.

En exponentiant, $10{,}54 - C(t) = e^{2{,}35}e^{-0{,}14t}$. Ainsi, $A = e^{2{,}35}$, arrondi au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $C(t) = 10{,}54 - 10{,}49e^{-0{,}14t}$ et $A = 10{,}49$.

Partie B

Question 1.a. Écrire, en fonction du réel r, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène y' + ry = 0.

L'équation homogène devient $y' = -ry$. Ses solutions sont de la forme $y(t) = Ke^{-rt}$, avec K réel. Cette écriture reste valable si $r = 0$: elle donne alors les fonctions constantes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ke^{-rt}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 10,54 est une solution particulière de l'équation différentielle y' + ry = 10,54r.

- $g'(t) = 0$, car g est constante.
- Alors $g'(t) + rg(t) = 0 + 10{,}54r = 10{,}54r$.

Cette expression est bien le membre de droite de l'équation : g est une solution particulière.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g' + rg = 10{,}54r$: g est bien une solution particulière.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + ry = 10,54r.

On ajoute à la solution particulière $g(t) = 10{,}54$ la solution générale de l'équation homogène. On obtient ainsi l'ensemble des solutions de l'équation complète.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 10{,}54 + Ke^{-rt}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. En utilisant la condition f(0) = 0, déduire que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) = 10{,}54(1 - e^{-rt})$.

1. La condition $f(0) = 0$ donne $10{,}54 + K = 0$, donc $K = -10{,}54$.

2. On remplace K dans la solution générale.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 10{,}54(1 - e^{-rt})$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2.a. À partir de la relation $AH_s = r \times C_s \times V$ et des valeurs fournies, déterminer une valeur approchée de r à 10^{-2} min^{-1} près.

On isole r dans $AH_s = r \times C_s \times V$:

$$r = \frac{1000}{0,01054 \times 700000} \approx 0,13554 \text{ min}^{-1}.$$

On arrondit au centième de min^{-1}.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r \approx 0{,}14$ min^{-1}.

Question 2.b. Indiquer si la modélisation par la fonction f et la valeur de r obtenue sont cohérentes avec la fonction C établie à la question 4 de la partie A.

- La partie A donne un facteur exponentiel $e^{-0,14t}$.
- La partie B donne e^{-rt} avec $r \approx 0{,}14$.

Les exposants concordent. Les coefficients de saturation sont aussi proches : 10,49 dans l'ajustement et 10,54 dans le modèle différentiel.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : les deux modèles sont cohérents, avec $r \approx 0{,}14$ min^{-1}.

Partie C

Question 1.a. Déterminer la limite de g en +∞ et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Lorsque t tend vers +∞, $e^{-0,09t}$ tend vers 0. La fonction $g(t) = 4{,}77(1 - e^{-0,09t})$ tend donc vers 4,77. Dans le contexte, cette limite est la concentration de saturation apparente après la remise en marche de l'aération.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 4,77$ mg·L^{-1}, la saturation apparente.

Question 1.b. **Déterminer au bout de combien de minutes la concentration en dioxygène atteindra 4,293 mg·L⁻¹, soit 90 % de la valeur de saturation apparente, et préciser la méthode utilisée.**

1. On résout $4{,}77(1 - e^{-0{,}09t}) = 4{,}293$.
2. Comme $4{,}293 = 0{,}9 \times 4{,}77$, on obtient $e^{-0{,}09t} = 0{,}1$, puis $t = \ln(10)/0{,}09$.

La valeur est obtenue par résolution algébrique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La concentration atteint 4,293 mg·L^{-1} après environ 25,6 min.

Question 2.a. **Vérifier que G définie par $G(t) = 4{,}77t + 53e^{-0{,}09t}$ est une primitive de g sur [0 ; +∞[.**

On dérive G :

$$G'(t) = 4{,}77 + 53(-0{,}09)e^{-0{,}09t} = 4{,}77 - 4{,}77e^{-0{,}09t}.$$

Or $g(t) = 4{,}77(1 - e^{-0{,}09t})$. Ainsi, G′(t) = g(t) sur [0 ; +∞[.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> G′(t) = g(t) : G est une primitive de g.

Question 2.b. **À l'aide de la formule donnée pour la concentration moyenne pendant les vingt-cinq premières minutes, déterminer cette moyenne arrondie à 0,1 mg·L⁻¹.**

Avec la primitive G, $C_m = \frac{G(25) - G(0)}{25}$.

Donc

$$C_m = \frac{4{,}77 \times 25 + 53e^{-0{,}09 \times 25} - 53}{25} \approx 2{,}873.$$

On arrondit au dixième de mg·L^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La concentration moyenne est 2,9 mg·L^{-1}.

2. Contrôle statistique d'ampoules pharmaceutiques

Des ampoules pharmaceutiques sont contrôlées selon leur diamètre de scellage et leur hauteur, modélisés par deux variables normales indépendantes. L'exercice étudie la conformité des ampoules, le nombre de produits conformes dans un prélèvement, puis un test bilatéral sur le volume moyen de remplissage.

Partie A

Question 1. Parmi les courbes I, II et III, identifier celle qui représente la variable aléatoire D, correspondant au diamètre de scellage, et justifier le choix.

La variable D a une moyenne de $7,1$ mm et un écart type de $0,24$ mm. Sa courbe doit donc être centrée autour de $7,1$, sur un axe gradué en millimètres, et présenter une dispersion resserrée. La courbe III correspond à ces caractéristiques : les courbes I et II ont des axes et des étalements incompatibles avec les paramètres de D.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe III.

Question 2.a. Déterminer la probabilité P(6,48 ≤ D ≤ 7,72), arrondie à 10^{-3}.

On centre et réduit les deux bornes avec la moyenne $7,1$ et l'écart type $0,24$: les valeurs obtenues sont environ $-2,583$ et $2,583$. La loi normale est symétrique autour de sa moyenne ; l'aire comprise entre ces deux valeurs centrées réduites est donc d'environ $0,9902$, à arrondir au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(6,48 \leq D \leq 7,72) \approx 0,990$.

Question 2.b. Déterminer la probabilité P(100,6 ≤ H ≤ 104,1), arrondie à 10^{-3}.

Borne de H	Valeur centrée réduite
100,6	$(100,6-102)/0,7=-2$
104,1	$(104,1-102)/0,7=3$

La probabilité recherchée est $\Phi(3)-\Phi(-2) \approx 0,9759$. Arrondie au millième, elle vaut $0,976$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(100,6 \leq H \leq 104,1) \approx 0,976$.

Question 3. En utilisant les résultats de la question 2, déduire la probabilité qu'une ampoule prise au hasard en début de ligne de finition soit correctement calibrée, c'est-à-dire qu'elle respecte simultanément les tolérances de diamètre et de hauteur.

Les événements « le diamètre est dans son intervalle de tolérance » et « la hauteur est dans son intervalle de tolérance » sont indépendants, car D et H le sont. La probabilité que les deux conditions soient vérifiées simultanément est donc le produit des probabilités de la question 2 : $0,990 \times 0,976 = 0,96624$. Au millième, cela donne $0,966$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité d'une ampoule correctement calibrée : $0,966$.

Partie B

Question 1. Donner, sans justification, la loi suivie par X, nombre d'ampoules correctement calibrées dans un prélèvement de 50, et préciser ses paramètres.

Chaque ampoule constitue un essai, avec deux issues possibles : conforme ou non conforme. Les 50 tirages sont assimilés à des tirages indépendants avec remise, et la probabilité de conformité est constante, égale à $0,97$. Le nombre X d'ampoules conformes suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,97$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,97)$.

Question 2. Déterminer l'espérance de X et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np. Ici, $E(X) = 50 \times 0,97 = 48,5$. Cette espérance décrit une moyenne sur un grand nombre de prélèvements : un prélèvement de 50 ampoules contient en moyenne 48,5 ampoules correctement calibrées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 48,5$ ampoules conformes en moyenne.

Question 3. Déterminer, arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'au moins quatre ampoules d'un prélèvement de 50 ne soient pas correctement calibrées.

1. Notons Y le nombre d'ampoules non conformes. Alors $Y \sim \mathcal{B}(50 ; 0,03)$.
2. « Au moins quatre » correspond à l'événement complémentaire de $Y \leq 3$: $P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) \approx 0,06276$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \geq 4) \approx 0,063.$

Partie C

Question 1. Sous l'hypothèse H₀ : μ = 10 mL, donner sans justification un réel h tel que P(10 − h ≤ V ≤ 10 + h) soit environ égal à 0,95, à 10^{-2} près.

Sous H_0, V suit une loi normale d'écart type $0,03$. L'intervalle central de probabilité $0,95$ s'étend d'environ $1,96$ écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h = 1,96 \times 0,03 = 0,0588$, soit $0,06$ mL à 10^{-2} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h = 0,06$ mL.

Question 2. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, la région d'acceptation est l'intervalle central de probabilité $0,95$, soit $[10 - h ; 10 + h]$ avec $h = 0,06$ mL. La règle de décision compare la moyenne de l'échantillon à cet intervalle.

- Accepter H_0 si la moyenne observée appartient à l'intervalle.
- Rejeter H_0 sinon.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Accepter H_0 si $9,94 \leq \overline{V} \leq 10,06$ mL ; sinon, la rejeter.

Question 3. À partir de la moyenne observée de 9,67 mL, déterminer si l'hypothèse H₀ peut être acceptée au seuil de signification de 5 %, et justifier la réponse.

La moyenne observée est $9,67$ mL. Elle est inférieure à la borne basse $9,94$ mL de la région d'acceptation au seuil de 5 % ; elle n'appartient donc pas à cette région. Le résultat de l'échantillon conduit à rejeter l'hypothèse nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 au seuil de 5 %.

Question 4. Pour un test bilatéral au seuil de signification de 1 %, choisir parmi les quatre intervalles proposés la région d'acceptation du test. Aucune justification n'est demandée.

Au seuil de 1 %, la région centrale d'acceptation est plus large qu'au seuil de 5 %. Parmi les intervalles proposés, seul l'intervalle D correspond à cette région, centrée sur 10 mL et d'une demi-largeur proche de $2,576 \times 0,03$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse D : $[9,92 ; 10,08]$ mL.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2025)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2025, code 25MATGRD1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. L'exercice 1 étudie l'oxygénation d'un bassin d'épuration par ajustement, équation différentielle et intégration. L'exercice 2 porte sur le calibrage d'ampoules, les lois normales et binomiales, puis un test statistique bilatéral.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La transformation $y = \ln(10{,}54 - C)$ permet d'obtenir un modèle affine à partir de l'évolution exponentielle de la concentration.
- Les solutions de $y' + ry = 10{,}54r$ s'écrivent $y(t) = 10{,}54 + Ke^{-rt}$, avec K une constante.
- Pour deux variables indépendantes, la probabilité de respecter simultanément deux tolérances est le produit des probabilités individuelles.
- Le nombre de conformes dans 50 essais indépendants de probabilité 0,97 suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,97.

Points de vigilance & attentes du jury

- Observer la forme du nuage avant de choisir un ajustement et distinguer y de la concentration C.
- Respecter les précisions d'arrondi et les unités, notamment min^{-1}, $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et mL.
- Pour calculer une conformité simultanée, justifier le produit des probabilités par l'indépendance de D et H.
- Dans le test bilatéral, comparer la moyenne observée à la région d'acceptation du seuil demandé avant de conclure.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment exploiter la transformation logarithmique de la concentration ?

On pose $y = \ln(10{,}54 - C)$, puis on utilise l'ajustement affine obtenu pour y en fonction de t. En exponentiant, on retrouve $10{,}54 - C$ et on isole C afin d'exprimer la concentration selon le modèle demandé.

Q : Comment calculer la probabilité qu'une ampoule respecte les deux tolérances ?

Calculez d'abord séparément les probabilités que le diamètre et la hauteur soient dans leurs intervalles de tolérance. Comme D et H sont indépendantes, leur produit donne la probabilité que les deux conditions soient respectées simultanément.

Q : Quelle est la durée de l'épreuve et comment organiser le travail ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices valant respectivement 11 et 9 points. Les parties A, B et C de l'exercice 2 sont indépendantes, ce qui permet de traiter d'abord les questions maîtrisées.

Q : Que faut-il montrer pour conclure sur le test bilatéral ?

Construisez la région d'acceptation avec le seuil de signification demandé, puis comparez la moyenne observée à ses bornes. Indiquez si elle appartient à cette région et concluez sur l'acceptation de H_0 au seuil considéré.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 7-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.