Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2025 • Code sujet : **25MATGRB4** • Durée : **3 heures** • Coefficient : **3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement d'une plaque d'aluminium (9 questions) **Page 3**

2. Signal périodique et série de Fourier (8 questions) **Page 6**

3. Probabilités et loi normale (4 questions) **Page 9**

4. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 4-Sujet.pdf

1. Refroidissement d’une plaque d’aluminium

Une plaque d’aluminium chauffée à 250 °C est sortie du four, et sa température est étudiée en fonction du temps de refroidissement, exprimé en minutes. L’exercice mobilise la résolution d’une équation différentielle puis l’étude de la fonction exponentielle qui modélise cette température.

Partie A. Équation différentielle

Question 1. Résoudre l’équation différentielle homogène (E_0) : y′ + 0,25y = 0.

On compare l’équation à la forme donnée $y' + ay = 0$: ici $a = 0,25$. Les solutions sont donc les fonctions exponentielles associées, définies sur l’intervalle demandé. La constante réelle k peut prendre toute valeur.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = k\,e^{-0,25t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Pour la fonction constante g définie par g(t) = c, déterminer le réel c pour que g soit solution de (E) : y′ + 0,25y = 7,5.

Une fonction constante vérifie $g'(t) = 0$. En la substituant dans $y' + 0,25y = 7,5$, on obtient $0 + 0,25c = 7,5$. Il suffit de diviser les deux membres par $0,25$ pour déterminer la constante qui convient.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $c = 30$.

Question 3. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,25y = 7,5.

La fonction constante égale à 30 est une solution particulière de l’équation complète. Toute autre solution s’obtient en lui ajoutant une solution de l’équation homogène trouvée à la question 1.

Solution particulière + solution homogène.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 30 + k\,e^{-0,25t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4. Déterminer l’expression de la fonction f sachant qu’à l’instant t = 0, la température est égale à 250 °C.

On utilise la forme générale $f(t) = 30 + k\,e^{-0,25t}$. À $t = 0$, l’exponentielle vaut 1. La condition initiale devient donc $30 + k = 250$, ce qui permet de déterminer k et d’écrire la fonction température.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 220e^{-0,25t} + 30$.

Partie B. Étude de fonction

Question 1. Pour f(t) = 220e^(−0,25t) + 30, déterminer la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement, arrondie à 0,1 °C.

Un quart d'heure correspond à 15 minutes. On remplace donc t par 15 dans l'expression de la température : $f(15) = 220e^{-0,25 \times 15} + 30 = 220e^{-3,75} + 30$. L'arrondi demandé est au dixième de degré Celsius.

✓ RÉPONSE À RETENIR

35,2 °C après 15 minutes.

Question 2. Déterminer la limite de f en +∞, préciser la conséquence pour sa courbe représentative, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $-0,25t$ tend vers $-\infty$, le terme $e^{-0,25t}$ tend vers 0. Ainsi, $f(t)$ tend vers 30. La courbe admet donc l'asymptote horizontale d'équation $y = 30$. Dans le contexte du modèle, la température de la plaque se rapproche de 30 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Limite : **30 °C**. Asymptote horizontale : $y = 30$.

Question 3. Déterminer f'(x) pour tout x de [0 ; +∞[, en déduire les variations de f sur cet intervalle, puis interpréter ces variations dans le contexte de l'exercice.

La dérivée de l'exponentielle composée donne $f'(x) = 220 \times (-0,25)e^{-0,25x} = -55e^{-0,25x}$. L'exponentielle étant toujours positive, cette dérivée est strictement négative sur $[0 ; +\infty[$. La fonction est donc strictement décroissante, de $f(0) = 250$ vers sa limite 30. La plaque refroidit continuellement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(x) = -55e^{-0,25x} < 0$: f décroît de 250 °C vers 30 °C.

Question 4. **En justifiant les réponses, déterminer si le technicien a raison d'affirmer qu'en cent secondes la plaque a perdu cent degrés, puis calculer à la seconde près la durée nécessaire pour que la température passe en dessous de 150 °C.**

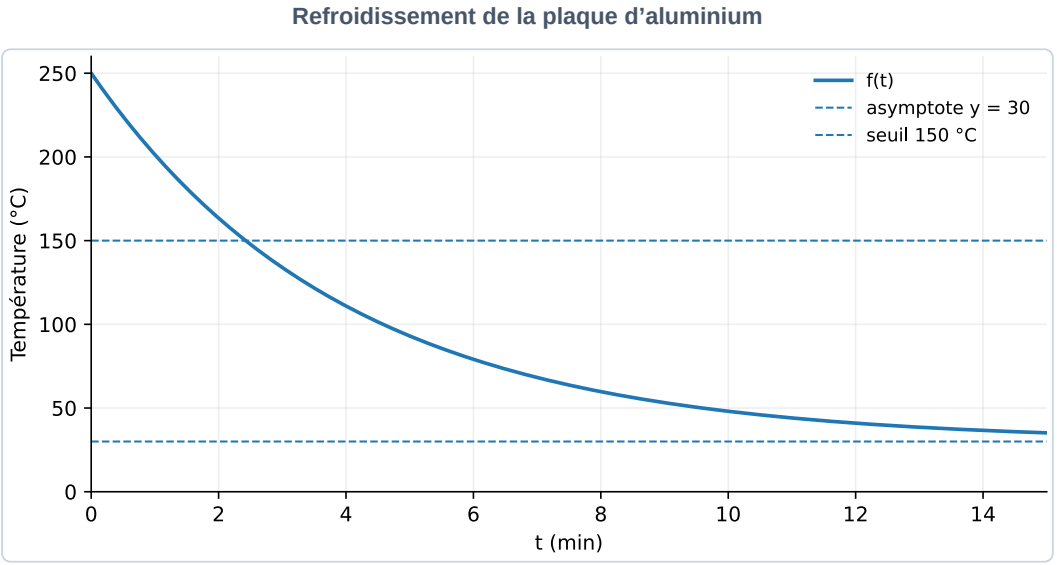
Cent secondes valent `100/60` minute. On obtient alors une température d'environ `175,0 °C`, soit une perte d'environ `75,0 °C` depuis `250 °C` : le technicien a tort. Pour le seuil, résoudre $220e^{-0,25t} + 30 = 150$ donne $t = 4\ln(11/6)$ minutes, soit `145,47` secondes. Le seuil est franchi juste après cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

En 100 s, la perte est d'environ **75 °C**. Seuil atteint après **145,47 s**, soit **145 s** à la seconde près; à 146 s, la température est sous 150 °C.

Question 5. **Réaliser un schéma donnant l'allure de la courbe représentative de f et y faire apparaître les résultats des questions 1 à 4 de la partie B.**

Le tracé doit partir de `(0 ; 250)`, décroître et se rapprocher de l'asymptote $y = 30$. Il indique aussi les repères utiles : $f(15) \approx 35,2$, la température après 100 secondes, environ `175,0 °C`, et le passage au seuil de `150 °C` à $t \approx 2,425$ minutes.



f(0) = 250 °C ; f(15) ≈ 35,2 °C ; f(100/60) ≈ 175,0 °C ; seuil atteint vers 2,425 min.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe décroissante de `(0 ; 250)` vers l'asymptote $y = 30$, avec le seuil de 150 °C franchi vers `2,425 min`.

2. Signal périodique et série de Fourier

La tension u(t), exprimée en volts, aux bornes d'un générateur est un signal périodique de période π, défini par u(t) = t sur [0 ; π[. Les questions portent sur ses valeurs, son tracé, ses caractéristiques et ses coefficients et amplitudes de Fourier, à l'aide d'un formulaire et de spectres représentés.

Question 1. Donner les valeurs de u(1), u(π), u(π + 1) et u(4).

On réduit chaque instant modulo la période π. Ainsi, $u(1) = 1$, $u(\pi) = u(0) = 0$ et $u(\pi + 1) = u(1) = 1$. Comme $\pi < 4 < 2\pi$, le temps correspondant dans la première période est $4 - \pi$, donc $u(4) = 4 - \pi$.

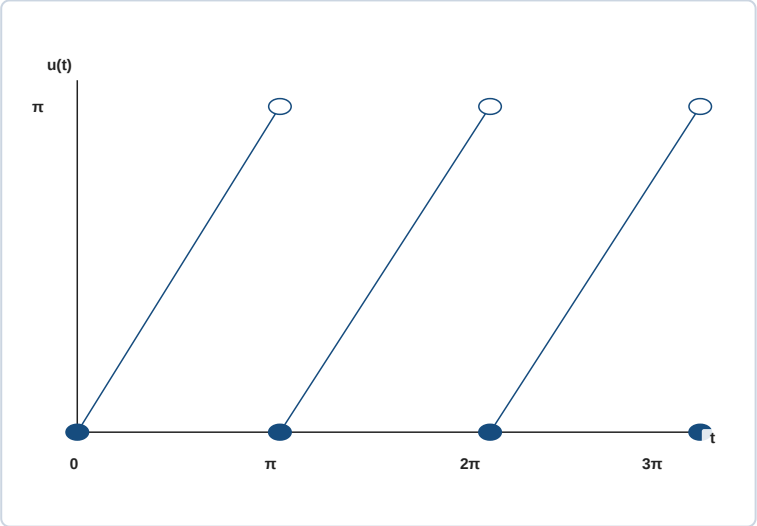
> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $u(1) = 1$, $u(\pi) = 0$, $u(\pi + 1) = 1$, $u(4) = 4 - \pi \approx 0{,}86$.

Question 2. Représenter sur la copie l'allure du signal u(t) sur un intervalle dont la longueur est au moins égale à trois périodes.

Le motif est une rampe croissante de 0 à π, répétée toutes les π secondes. À chaque multiple de π, le signal vaut 0 et la rampe repart.

Le tracé ci-dessous couvre trois périodes. Les cercles ouverts marquent les limites supérieures non atteintes sur chaque période.

Signal u(t) sur trois périodes



> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Signal en dents de scie, de période π, sur un intervalle de longueur 3π.

Question 3. Un signal est dit alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle. Déterminer si u(t) est alternatif et justifier la réponse.

La valeur moyenne sur une période est :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Elle n'est pas nulle : le signal n'est donc pas alternatif.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Valeur moyenne : $\frac{\pi}{2} \neq 0$. Le signal n'est pas alternatif.

Question 4. Déterminer la fréquence f du signal u(t), ainsi que sa pulsation ω.

Avec $T = \pi$ secondes, la fréquence et la pulsation sont :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32\ \text{Hz}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ Hz et $\omega = 2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Série de Fourier

Question 5. En utilisant l'intégrale fournie pour tout entier n ≥ 1, déduire l'expression du coefficient de Fourier b_n pour tout entier n ≥ 1.

Le formulaire donne, avec $T = \pi$ et $\omega = 2$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(2nt)\,dt$. En remplaçant l'intégrale par la valeur fournie :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{n}, \qquad n \geq 1.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = -\frac{1}{n}$.

Amplitudes

Question 6. Sachant que $a_n = 0$ pour tout entier n ≥ 1, recopier et compléter le tableau des valeurs exactes et des valeurs approchées au 10^{-2} près des amplitudes A_n pour n = 0, 1, 2, 3 et 4.

La moyenne calculée sur une période donne $a_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $A_0 = \frac{\pi}{2}$. Pour $n \geq 1$, $a_n = 0$ et $b_n = -\frac{1}{n}$, donc $A_n = \frac{1}{n}$.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Valeur exacte de A_n	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Valeur approchée au 10^{-2} près	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$: $A_n = \frac{\pi}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, soit $1{,}57; 1{,}00; 0{,}50; 0{,}33; 0{,}25$.

Spectres

Question 7.a. Expliquer pourquoi le Spectre 2 ne peut pas être celui du signal u(t).

Le spectre 2 ne comporte pas de barre aux rangs $n = 1$ et $n = 3$. Pourtant, pour le signal $u(t)$, les amplitudes correspondantes sont $A_1 = 1$ et $A_3 = \frac{1}{3}$, donc non nulles. Le spectre 2 ne peut pas représenter ce signal.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le spectre 2 omet les amplitudes non nulles $A_1 = 1$ et $A_3 = \frac{1}{3}$.

Question 7.b. Expliquer pourquoi le Spectre 3 ne peut pas être celui du signal u(t).

Sur le spectre 3, la barre d'abscisse $n = 0$ indique $A_0 = 2$. Or la composante constante est l'amplitude de la valeur moyenne du signal, calculée à la question 3 : $A_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, et non 2.

Le spectre 3 ne peut donc pas correspondre à $u(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le spectre 3 indique $A_0 = 2$, alors que $A_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

3. Probabilités et loi normale

Une première situation porte sur le tirage au hasard d'une boule parmi dix boules blanches ou noires portant le numéro 1 ou 2. Une seconde modélise la masse d'un cheval par une loi normale et présente une courbe de densité où la zone grisée correspond à une probabilité de 0,95.

Urne

Question 1.a. Calculer la probabilité que la boule tirée au hasard porte le numéro 2.

Les boules portant le numéro 2 sont les deux boules blanches et l'unique boule noire qui portent ce numéro, soit 3 boules au total. Comme les 10 boules de l'urne ont la même chance d'être tirées, la probabilité recherchée est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de boules de l'urne.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(\text{numéro } 2) = \frac{3}{10} = 0,3.$

Question 1.b. Sachant que la boule tirée porte le numéro 2, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'une boule noire.

1. En sachant que la boule porte le numéro 2, on ne considère que les 3 boules portant ce numéro.
2. Parmi elles, une seule est noire. La probabilité conditionnelle est donc le rapport entre cette boule noire et les 3 boules possibles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(\text{noire} \mid \text{numéro } 2) = \frac{1}{3}.$

Loi normale

Question 2.a. À partir de la courbe de densité de la masse M des chevaux, indiquer sans justification la valeur de la moyenne μ.

La verticale centrale de la courbe est repérée à 450 kg.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\mu = 450 \text{ kg}.$

Question 2.b. À partir de la zone grisée représentant une probabilité de 0,95, expliquer pourquoi l'écart-type σ est environ égal à 40 kg.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se situent dans l'intervalle centré sur la moyenne et délimité par deux écarts-types de part et d'autre. Sur le schéma, cet intervalle va de 370 kg à 530 kg et son centre est 450 kg.

- La demi-largeur vaut $530 - 450 = 80$ kg.
- Donc $2\sigma \approx 80$, soit $\sigma \approx 40$ kg.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\sigma \approx 40$ kg.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2025)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2025, porte le code 25MATGRB4 et dure trois heures, avec un coefficient 3 pour la spécialité Système photonique. Les trois exercices étudient le refroidissement d'aluminium, un signal périodique et sa série de Fourier, puis des probabilités et une loi normale. Ils évaluent calcul, modélisation, interprétation et représentation graphique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, une solution particulière constante vaut b/a ; les solutions générales s'obtiennent en ajoutant $ke^{(-at)}$.
- Pour $f(t) = 220e^{(-0,25t)} + 30$, la limite en $+\infty$ est 30 °C et $f'(t) = -55e^{(-0,25t)}$, donc la température décroît.
- Pour un signal de période T, $f = 1/T$ et $\omega = 2\pi/T$; ici $T = \pi$, donc $f = 1/\pi$ Hz et $\omega = 2$ rad/s.
- Pour ce signal, $a_0 = \pi/2$, $b_n = -1/n$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$; ainsi $A_0 = \pi/2$ et $A_n = 1/n$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Le temps du modèle thermique est en minutes ; convertir en secondes pour comparer avec l'affirmation du technicien et répondre à la durée demandée.
- Pour u(t), appliquer la périodicité avant d'utiliser sa définition sur $[0 ; \pi[$.
- Distinguer la moyenne a_0 des amplitudes A_n et appliquer séparément la définition de A_0.
- Sur la courbe normale, lire le centre de symétrie et les bornes de la zone grisée pour estimer μ et σ.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer le temps nécessaire pour que la plaque passe sous 150 °C ?

Poser $220e^{(-0,25t)} + 30 < 150$, isoler l'exponentielle puis utiliser le logarithme. Le temps obtenu est en minutes ; le convertir en secondes, arrondir à la seconde et vérifier le sens de l'inégalité.

Q : Comment calculer les amplitudes du signal dans le tableau ?

Pour $n \geq 1$, appliquer $A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$; avec $a_n = 0$ et $b_n = -1/n$, on obtient $A_n = 1/n$. Pour $n = 0$, utiliser séparément $A_0 = |a_0|$ et la formule de la moyenne.

Q : Comment organiser les trois heures de l'épreuve ?

Les exercices 1 et 2 valent chacun 8 points, et l'exercice 3 vaut 4 points. Répartir le temps selon ces pondérations, garder du temps pour les tracés et le tableau, puis vérifier unités, arrondis et réponses.

Q : Quels éléments de rédaction et de présentation sont attendus dans ce sujet ?

Le sujet demande explicitement des justifications pour certaines réponses, notamment sur le technicien, les spectres et l'écart-type. Présenter une méthode lisible, préciser les unités et les arrondis, et faire apparaître les résultats demandés sur les schémas.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 4-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.