Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2025 • Code sujet : **25MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement d'une plaque d'aluminium (9 questions) **Page 3**

2. Étude d'un signal périodique et de son développement en série de Fourier (8 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 9**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 2-Sujet.pdf

1. Refroidissement d’une plaque d’aluminium

Une plaque d’aluminium chauffée à 250 °C est sortie du four et sa température est étudiée en fonction du temps de refroidissement, exprimé en minutes. L’exercice traite d’abord une équation différentielle, puis étudie la fonction de température et son évolution.

Partie A. Équation différentielle

Question 1. Résoudre l’équation différentielle homogène y′ + 0,25y = 0 en utilisant la formule fournie.

On applique directement la formule donnée pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$. Ici, le coefficient de y est $a = 0,25$. La constante k peut prendre toute valeur réelle, ce qui donne l’ensemble complet des solutions sur l’intervalle considéré.

$$y(t) = ke^{-0,25t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,25t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer le réel c pour que la fonction constante g(t) = c soit solution de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,25y = 7,5.

Une fonction constante $g(t) = c$ a une dérivée nulle : $g'(t) = 0$. Pour qu’elle vérifie l’équation différentielle, on remplace donc y' par 0 et y par c. On obtient $0,25c = 7,5$, puis on divise les deux membres par $0,25$.

$$c = \frac{7,5}{0,25} = 30.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $c = 30$.

Question 3. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E).

La question précédente fournit une solution particulière constante : $y(t) = 30$. Toute solution de l’équation complète s’obtient en ajoutant à cette solution une solution de l’équation homogène. Or celles-ci sont de la forme $ke^{-0,25t}$, où k est réel. On obtient ainsi toutes les solutions de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 30 + ke^{-0,25t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4. Déterminer l'expression de la fonction f sachant qu'à l'instant t = 0, la température de la plaque est égale à 250 °C.

La solution générale est $y(t) = 30 + ke^{-0,25t}$. La température initiale impose $f(0) = 250$. En utilisant $e^0 = 1$, on trouve $30 + k = 250$, donc $k = 220$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient l'expression demandée pour la température pendant le refroidissement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 220e^{-0,25t} + 30$.

Partie B. Étude de fonction

Question 1. Pour f(t) = 220e^(−0,25t) + 30, déterminer la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement, arrondie à 0,1 °C.

Un quart d'heure correspond à 15 minutes, puisque le temps t est exprimé en minutes. On évalue donc la fonction en $t = 15$: $f(15) = 220e^{-0,25\times 15} + 30$. La calculatrice donne environ $35,1826$. Arrondie au dixième de degré Celsius, la température est donc $35,2\ ^\circ\mathrm{C}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $35,2\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 2. Déterminer la limite de f en +∞, préciser la conséquence pour la courbe représentative de f, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-0,25t}$ tend vers 0. Par conséquent, $f(t) = 220e^{-0,25t} + 30$ tend vers 30. La courbe admet donc la droite d'équation $y = 30$ comme asymptote horizontale. Dans le contexte, la température de la plaque se rapproche de 30 °C au cours du refroidissement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Limite : 30 °C ; asymptote horizontale : $y = 30$. La plaque se rapproche de 30 °C.

Question 3. Déterminer f'(t) pour tout t de [0 ; +∞[, en déduire les variations de f sur cet intervalle, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La dérivée de $e^{-0,25t}$ est $-0,25e^{-0,25t}$. Ainsi, $f'(t) = 220 \times (-0,25)e^{-0,25t} = -55e^{-0,25t}$. L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$. La fonction est donc strictement décroissante, de $f(0) = 250$ vers sa limite 30. La plaque refroidit continuellement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -55e^{-0{,}25t} < 0$; f décroît de 250 °C vers 30 °C.

Question 4. Vérifier si l'affirmation du technicien, selon laquelle la plaque a perdu cent degrés en cent secondes, est exacte. Déterminer aussi, avec justification et à la seconde près, la durée nécessaire pour que sa température passe en dessous de 150 °C.

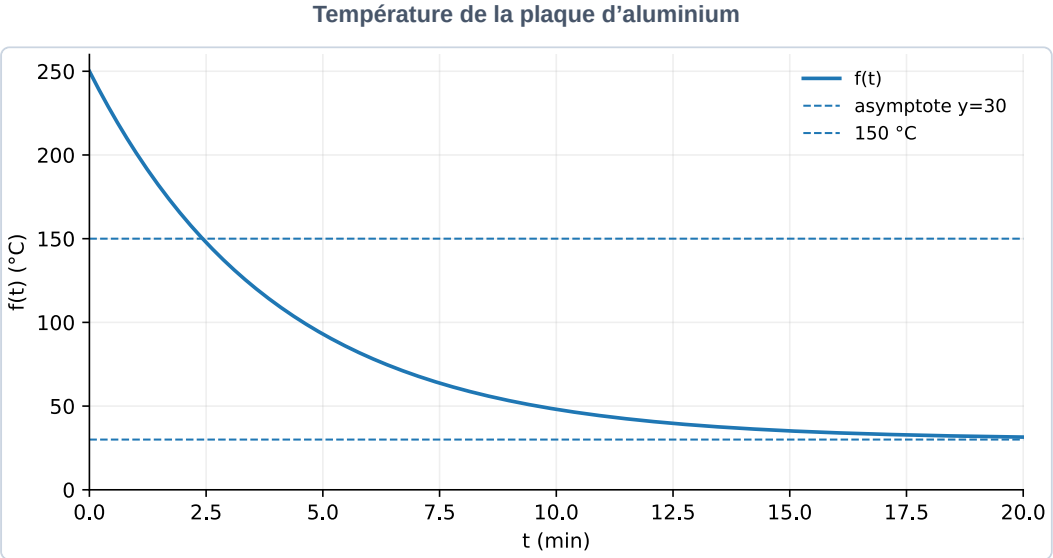
Cent secondes représentent $100/60$ minutes. À cet instant, $f(100/60) \approx 175,03\ °\mathrm{C}$, donc la perte est d'environ $250 - 175,03 = 74,97\ °\mathrm{C}$: l'affirmation est fausse. Pour passer sous 150 °C, on résout $220e^{-0{,}25t} + 30 < 150$, soit $t > 4\ln(11/6)$ minutes. Cela correspond à environ 145,41 secondes, arrondi à la seconde.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Affirmation fausse : perte d'environ 75,0 °C en 100 s. Passage sous 150 °C après environ 145 s.

Question 5. Réaliser un croquis de la courbe représentative de f et y faire apparaître les résultats des questions 1 à 4 de cette partie.

La courbe part du point $(0; 250)$, décroît et se rapproche de l'asymptote horizontale $y = 30$. Elle passe par $(15; 35,2)$, correspondant au quart d'heure. Le niveau 150 °C est atteint pour $t = 4\ln(11/6)$, soit environ 2,42 minutes. À 100 secondes, le point correspondant a pour ordonnée environ 175,0 °C.



Repères : (0 ; 250), (100/60 ; 175,0), (2,42 ; 150), (15 ; 35,2).

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe décroissante de $(0; 250)$, passant par $(15; 35,2)$ et tendant vers $y = 30$; niveau 150 °C atteint vers 145 s.

2. Étude d’un signal périodique et de son développement en série de Fourier

La tension u(t), exprimée en volts, est un signal périodique de période π, défini par u(t) = t sur [0 ; π[. Les questions portent sur ses valeurs, sa représentation, ses caractéristiques périodiques, ses coefficients et amplitudes de Fourier, puis sur l’identification de spectres incompatibles avec ce signal.

Question 1. Donner les valeurs de u(1), u(π), u(π + 1) et u(4), en utilisant la périodicité et la définition du signal.

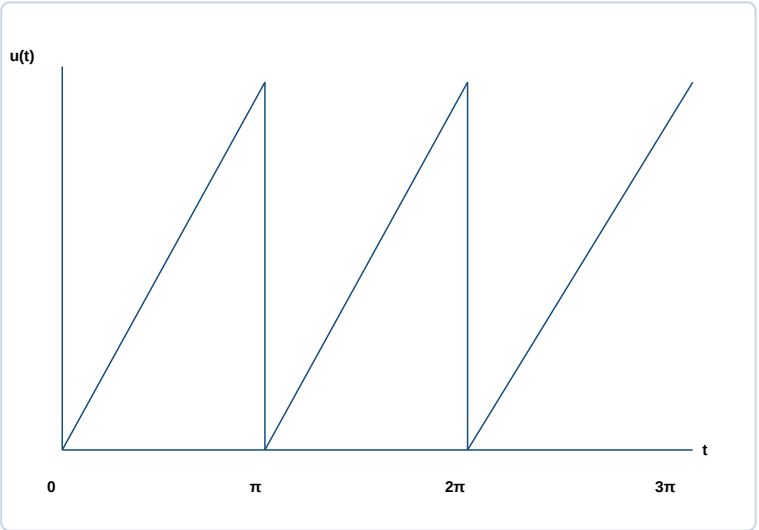
On réduit les temps modulo la période π. Ainsi, $u(1) = 1$, $u(\pi) = u(0) = 0$, $u(\pi + 1) = u(1) = 1$ et $u(4) = u(4 - \pi) = 4 - \pi$, car $4 - \pi \in [0; \pi[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $u(1) = 1$, $u(\pi) = 0$, $u(\pi + 1) = 1$, $u(4) = 4 - \pi$ V.

Question 2. Réaliser un croquis représentant l’allure du signal u(t) sur un intervalle de longueur au moins égale à trois périodes.

Le signal est une rampe croissante de pente 1 sur chaque intervalle de longueur π, puis revient à 0 à chaque multiple de π. Le tracé montre trois périodes sur $[0; 3\pi]$. Les valeurs au sommet de chaque rampe sont des limites non atteintes, puisque les intervalles de définition excluent leurs extrémités droites.

Signal périodique u(t) sur trois périodes



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Signal en dents de scie de période π, croissant de 0 vers π à chaque période.

Question 3. **Déterminer si le signal u(t) est alternatif, en justifiant la réponse à partir de sa valeur moyenne sur une période.**

Sur une période, la valeur moyenne est $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$, qui n'est pas nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le signal n'est pas alternatif : sa valeur moyenne est $\frac{\pi}{2}$ V.

Question 4. **Déterminer la fréquence f du signal u(t) et sa pulsation ω.**

Avec $T = \pi$ s, la fréquence et la pulsation sont $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}$ Hz et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ rad·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = \frac{1}{\pi}$ Hz et $\omega = 2$ rad·s^{-1}.

Question 5. **À partir de l'intégrale fournie et de la formule de Fourier, déduire que, pour tout entier n ≥ 1, le coefficient b_n vaut −1/n.**

La formule de Fourier donne $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,dt$. Avec $T = \pi$, $\omega = 2$ et l'intégrale fournie : $b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{n}$, pour tout entier $n \geq 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = -\frac{1}{n}$.

Question 6. **À l'aide des définitions $A_0 = |a_0|$ et $A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$, ainsi que de l'information $a_n = 0$ pour n ≥ 1, compléter le tableau des valeurs exactes des amplitudes A_n et de leurs valeurs approchées au centième pour n = 0, 1, 2, 3 et 4.**

La formule de Fourier donne $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{\pi}{2}$, donc $A_0 = \frac{\pi}{2}$. Pour $n \geq 1$, $a_n = 0$ et $b_n = -\frac{1}{n}$, donc $A_n = \frac{1}{n}$.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Valeur exacte de A_n	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Valeur approchée au centième	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_0 = \frac{\pi}{2}$, puis $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_3 = \frac{1}{3}$, $A_4 = \frac{1}{4}$. Au centième : 1,57 ; 1,00 ; 0,50 ; 0,33 ; 0,25.

7. Spectres

Question 7.a. Expliquer pourquoi le Spectre 2 ne peut pas représenter le signal u(t), en vous appuyant sur les caractéristiques de ses amplitudes.

Pour tout indice $n \geq 1$, l'amplitude attendue est $A_n = \frac{1}{n}$, donc elle est strictement positive. Or le Spectre 2 ne comporte pas de barre aux indices 1 et 3 : leurs amplitudes y seraient nulles, contrairement aux valeurs attendues.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le Spectre 2 est impossible : il manque les amplitudes non nulles $A_1 = 1$ et $A_3 = \frac{1}{3}$.

Question 7.b. Expliquer pourquoi le Spectre 3 ne peut pas représenter le signal u(t), en vous appuyant sur les caractéristiques de ses amplitudes.

L'amplitude d'indice 0 vaut $A_0 = |a_0| = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$. Sur le Spectre 3, la barre d'indice 0 dépasse le niveau 2 : sa hauteur ne correspond donc pas à l'amplitude attendue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le Spectre 3 est impossible : sa barre d'indice 0 dépasse 2, alors que $A_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2025)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2025, porte le code 25MATGRB2 et dure deux heures, avec un coefficient de 1,5. Ses deux exercices, chacun noté sur 10 points, étudient le refroidissement d'une plaque d'aluminium par équation différentielle, puis une tension périodique par les séries de Fourier. Les compétences évaluées incluent calcul, interprétation, représentation graphique et justification.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière constante traite un second membre constant.
- Pour $f(t) = 220e^{-0,25t} + 30$, la limite à l'infini est 30 °C et la dérivée négative traduit la baisse de température.
- Pour un signal de période T, la fréquence vaut $f = 1/T$ et la pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$.
- Les amplitudes de Fourier sont $A_0 = |a_0|$ et $A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$; ici, $a_0 = \pi/2$, $a_n = 0$ et $b_n = -1/n$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : le temps du modèle thermique est en minutes, tandis que celui du signal est en secondes.
- Pour le seuil de 150 °C, résoudre l'inégalité, convertir la durée en secondes et effectuer l'arrondi demandé.
- Sur les croquis, montrer l'allure périodique du signal ou l'asymptote thermique et reporter les résultats demandés.
- Distinguer le terme moyen A_0 des amplitudes A_n pour $n \geq 1$ dans le tableau et l'analyse des spectres.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution particulière constante de l'équation de refroidissement ?

Pour $g(t) = c$, la dérivée est nulle. En remplaçant y par c dans $y' + 0,25y = 7,5$, on obtient $0,25c = 7,5$, donc $c = 30$. Cette constante s'ajoute à la solution de l'équation homogène.

Q : Comment calculer les amplitudes de Fourier du tableau ?

La valeur moyenne donne $a_0 = (1/\pi)\int_0^{\pi} t\,dt = \pi/2$, donc $A_0 = \pi/2$. Pour $n \geq 1$, $a_n = 0$ et $b_n = -1/n$, donc $A_n = 1/n$; arrondir ensuite au centième.

Q : Comment organiser son temps pour cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre l'étude du refroidissement et celle du signal, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les croquis. Le sujet ne précise pas de durée par question.

Q : Qu'attend le jury pour les réponses graphiques et les justifications ?

Il faut relier les résultats aux calculs : interpréter la limite et les variations thermiques, justifier le caractère alternatif par la valeur moyenne et expliquer les spectres incompatibles avec les amplitudes. Les croquis doivent faire apparaître les caractéristiques demandées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.