Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2025 • Code sujet : **25MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement d'une plaque d'aluminium (9 questions) **Page 3**

2. Loi exponentielle, probabilités conditionnelles et intervalle de confiance (13 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 1-Sujet.pdf

1. Refroidissement d’une plaque d’aluminium

Une plaque d’aluminium chauffée à 250 °C est sortie du four, et sa température est étudiée pendant son refroidissement. Le modèle s’appuie sur une équation différentielle puis une fonction exponentielle pour décrire et interpréter cette évolution.

Partie A. Équation différentielle

Question 1. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,25y = 0 en utilisant la formule fournie.

La formule donnée s’applique avec $a = 0{,}25$. Ainsi, toute solution de l’équation homogène sur l’intervalle considéré est de la forme $y(t) = ke^{-0{,}25t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}25t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Pour la fonction constante g définie par g(t) = c, déterminer le réel c qui permet à g d’être solution de l’équation différentielle (E) : y' + 0,25y = 7,5.

1. Pour la fonction constante $g(t) = c$, on a $g'(t) = 0$.
2. En la substituant dans $y' + 0{,}25y = 7{,}5$, on obtient $0{,}25c = 7{,}5$, donc $c = 7{,}5 \div 0{,}25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $c = 30$.

Question 3. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y' + 0,25y = 7,5.

Une solution particulière de l’équation complète est la fonction constante $g(t) = 30$, trouvée à la question précédente. Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant à cette solution particulière toutes les solutions de l’équation homogène. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}25t} + 30$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4. Déterminer l’expression de la fonction f sachant qu’à l’instant t = 0, la température de la plaque est égale à 250 °C.

On remplace t par 0 dans la solution générale : $f(0) = k\,e^{0} + 30 = k + 30$. La température initiale vaut 250 °C, donc $k + 30 = 250$, d’où $k = 220$. On substitue cette valeur dans l’expression générale pour obtenir la fonction température.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 220e^{-0,25t} + 30$.

Partie B. Étude de fonction

Question 1. Avec f(t) = 220e$^{-0,25t}$ + 30, déterminer la valeur approchée à 0,1 °C de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.

Un quart d'heure correspond à 15 minutes. On calcule donc $f(15) = 220e^{-0,25 \times 15} + 30$. La valeur obtenue est arrondie au dixième de degré Celsius, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

35,2 °C.

Question 2. Déterminer la limite de f en +∞, préciser la conséquence pour la courbe représentative de f, puis interpréter ce résultat dans le contexte du refroidissement de la plaque.

Comme $e^{-0,25t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, on obtient $f(t) \to 30$. La courbe admet donc l'asymptote horizontale d'équation $y = 30$. Dans le modèle, la température de la plaque se rapproche de 30 °C au cours du refroidissement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Limite : **30 °C** ; asymptote horizontale : $y = 30$.

Question 3. Déterminer f'(t) pour tout t de [0 ; +∞[, en déduire les variations de f sur cet intervalle, puis interpréter ces variations dans le contexte de l'exercice.

En dérivant, on obtient $f'(t) = 220 \times (-0,25)e^{-0,25t} = -55e^{-0,25t}$. L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle.

Intervalle	Signe de *f'*	Variation de *f*
[0 ; +∞[	Négatif	Décroît de 250 vers 30

La plaque refroidit continûment et sa température tend vers 30 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -55e^{-0,25t}$; f est strictement décroissante.

Question 4. **Vérifier si le technicien a raison d'affirmer que la plaque perd cent degrés en cent secondes. Déterminer ensuite, à la seconde près, la durée nécessaire pour que sa température passe en dessous de 150 °C. Justifier les réponses.**

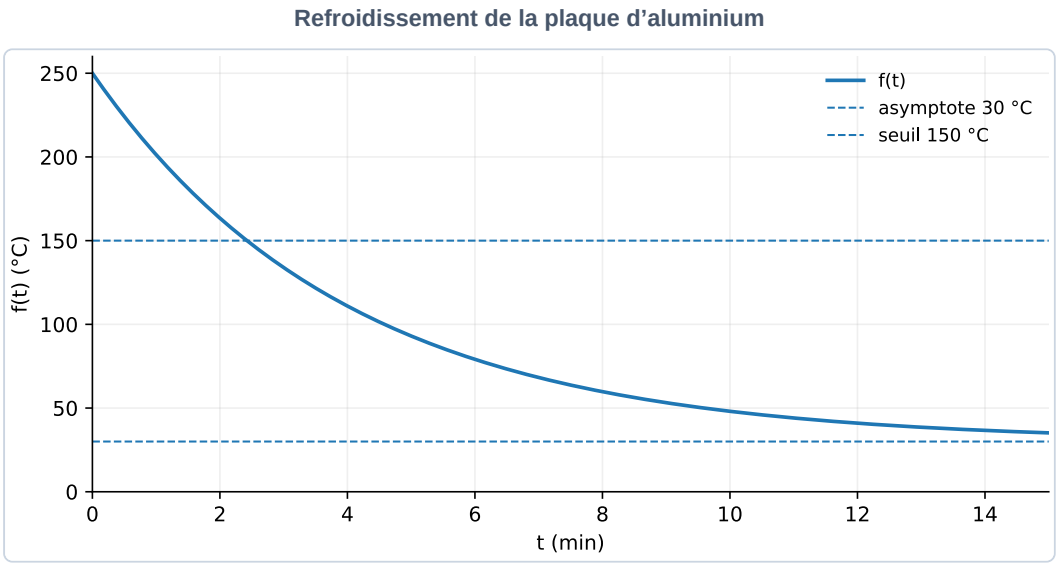
1. Cent secondes correspondent à $100 \div 60$ minutes. La perte vaut $250 - f(100 \div 60) \approx 75{,}0$ °C : l'affirmation est fausse.
2. La température atteint 150 °C lorsque $220e^{-0{,}25t} + 30 = 150$, soit $t = 4\ln(11 \div 6) \approx 2{,}4245$ minutes, donc environ 145,47 secondes. Elle passe sous 150 °C après cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

En 100 secondes, la perte est d'environ **75,0 °C**. Le seuil de 150 °C est franchi après environ **145 secondes** (145,47 s).

Question 5. **Réaliser sur la copie un croquis donnant l'allure de la courbe représentative de f et faisant également apparaître les résultats des questions 1 à 4 de cette partie.**

Le croquis représente une courbe strictement décroissante partant de $(0 ; 250)$ et s'approchant de l'asymptote $y = 30$. Il fait apparaître le point $(15 ; 35{,}2)$, le niveau 150 °C atteint vers $t = 2{,}42$ min, et la température d'environ 175,0 °C après 100 secondes.



La courbe part de (0 ; 250), décroît vers 30 °C, passe par (15 ; 35,2) et atteint 150 °C vers 2,42 min. À 100 s, f(t) ≈ 175,0 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe décroissante de $(0 ; 250)$ vers l'asymptote $y = 30$; $f(15) \approx 35{,}2$ et seuil de 150 °C atteint vers $2{,}42$ min.

2. Loi exponentielle, probabilités conditionnelles et intervalle de confiance

L'exercice prend pour cadre un café : il étudie d'abord le temps d'attente des clients, puis le lien entre le lieu de service et le type de boisson. Il se termine par l'estimation de la proportion d'étudiants parmi les clients et le calcul d'un manque à gagner associé à une réduction.

Partie A. Loi exponentielle

Question 1. Le temps d'attente moyen d'un client est de 4 minutes. Expliquer pourquoi le paramètre λ de la loi exponentielle modélisant ce temps vaut 0,25.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Le temps moyen donné est de 4 minutes, donc $4 = \frac{1}{\lambda}$. En prenant l'inverse, on obtient $\lambda = \frac{1}{4} = 0{,}25$ minute^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 0{,}25$ minute^{-1}.

Question 2. Décrire par une phrase l'événement T < 3, puis déterminer sa probabilité et l'arrondir à 10⁻³.

L'événement $T < 3$ signifie que le client attend moins de trois minutes. Pour une loi exponentielle, $P(T < 3) = 1 - e^{-\lambda \times 3}$. Avec $\lambda = 0{,}25$, cela donne $1 - e^{-0{,}75} \approx 0{,}528$. La probabilité est arrondie au millième comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 3) \approx 0{,}528$.

Question 3. Déterminer la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes et arrondir à 10⁻³.

La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes est la probabilité de survie de la loi exponentielle : $P(T \geq 5) = e^{-\lambda \times 5}$. Comme la variable est continue, $P(T \geq 5) = P(T > 5)$. Ainsi, $P(T \geq 5) = e^{-1{,}25} \approx 0{,}287$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \geq 5) \approx 0{,}287$.

Question 4. Déterminer, à la seconde près, le temps t tel que P(T > t) = 0,1.

Pour une loi exponentielle, $P(T > t) = e^{-0{,}25t}$. On résout $e^{-0{,}25t} = 0{,}1$, d'où $t = \frac{-\ln(0{,}1)}{0{,}25} \approx 9{,}21034$ minutes. La partie décimale correspond à environ 12,62 secondes, soit 13 secondes à la seconde près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

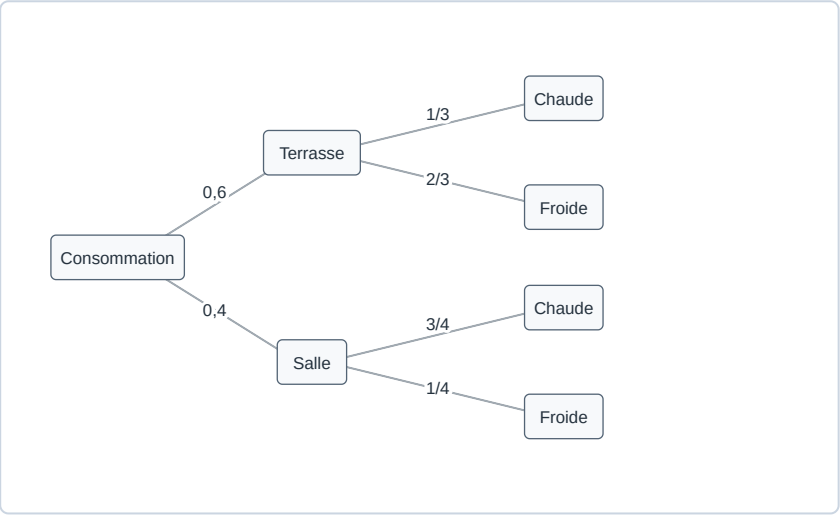
$t \approx 9$ min 13 s.

Partie B. Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de consommations servies en terrasse ou en salle et des proportions de boissons chaudes dans chaque lieu, dresser un arbre pondéré représentant la situation.

La première bifurcation distingue le lieu de service. Les probabilités du second niveau sont conditionnelles au lieu : en terrasse, une boisson chaude est servie dans un tiers des cas ; en salle, dans les trois quarts des cas. Les branches « froide » complètent chacune les probabilités jusqu'à 1.

Arbre pondéré des lieux et boissons



Les probabilités des branches issues d'un même nœud totalisent 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : lieu, puis type de boisson, avec les probabilités inscrites sur chaque branche.

Question 2. Déterminer la probabilité P(T ∩ C), où T désigne une consommation servie en terrasse et C une boisson chaude.

Le chemin correspondant à une consommation servie en terrasse puis à une boisson chaude a pour probabilité le produit des probabilités de ses branches. Ainsi, $P(T \cap C) = P(T)P(C \mid T) = 0{,}6 \times \frac{1}{3} = 0{,}2$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap C) = 0{,}2$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'une consommation choisie au hasard soit une boisson chaude est égale à 1/2.**

Les consommations servies en terrasse et en salle forment deux cas qui couvrent toutes les possibilités. La probabilité d'une boisson chaude est donc la somme des probabilités des deux chemins correspondants : $P(C) = 0{,}6 \times \frac{1}{3} + 0{,}4 \times \frac{3}{4} = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(C) = \frac{1}{2}$.

Question 4. **Une boisson chaude vient d'être commandée. Déterminer si elle a davantage de chances d'être servie en salle qu'en terrasse, comme l'affirme le serveur, et justifier la réponse.**

Parmi les boissons chaudes, la probabilité d'un service en salle est $P(\overline{T} \mid C) = \frac{0{,}4 \times 0{,}75}{0{,}5} = 0{,}6$. En terrasse, elle est $P(T \mid C) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$. La probabilité d'un service en salle est donc plus élevée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : sachant que la boisson est chaude, salle $0{,}6$, terrasse $0{,}4$.

Question 5. **Déterminer si les événements T et C sont indépendants et justifier la réponse.**

Les événements T et C seraient indépendants si $P(T \cap C) = P(T)P(C)$. Or $P(T \cap C) = 0{,}2$, tandis que $P(T)P(C) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$. Ces deux valeurs étant différentes, les événements ne sont pas indépendants.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, $P(T \cap C) = 0{,}2 \neq P(T)P(C) = 0{,}3$.

Partie C. Intervalle de confiance

Question 1. **Dans un échantillon aléatoire de 1 000 clients comprenant 525 étudiants, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p d'étudiants parmi les clients.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. On divise le nombre d'étudiants, 525, par l'effectif total, 1 000 : $f = \frac{525}{1000} = 0{,}525$. En pourcentage, cette fréquence est égale à 52,5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}525$, soit $52{,}5\,\%$.

Question 2. Estimer la proportion p par un intervalle de confiance au niveau de 90 %, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie utilise $f = 0{,}525$ et $n = 1000$. La marge vaut $1{,}65\sqrt{\frac{0{,}525(1-0{,}525)}{1000}} \approx 0{,}0261$.

Borne	Calcul	Valeur
Inférieure	$0{,}525 - 0{,}0261$	$0{,}499$
Supérieure	$0{,}525 + 0{,}0261$	$0{,}551$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 90 % : $[0{,}499\,;\,0{,}551]$, soit $[49{,}9\,\%;\,55{,}1\,\%]$.

Question 3. Déterminer si le patron a raison d'affirmer que la proportion p est obligatoirement contenue dans l'intervalle de confiance et justifier la réponse.

Non. Un niveau de confiance de 90 % décrit la fiabilité de la méthode sur un grand nombre d'échantillons : environ 90 % des intervalles construits ainsi contiennent la proportion vraie. Il ne garantit donc pas que l'intervalle calculé à partir de cet échantillon précis contienne obligatoirement p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : cet intervalle précis ne contient pas obligatoirement p.

Question 4. En supposant que p est effectivement contenue dans l'intervalle de confiance, déterminer sous la forme d'un intervalle le manque à gagner mensuel lié à la réduction de 10 % accordée aux étudiants. Tenir compte de leur consommation moyenne de 3,50 euros et des 5 000 clients mensuels.

La réduction par étudiant vaut $3{,}50 \times 0{,}10 = 0{,}35$ €. Pour 5 000 clients, le manque à gagner est $5000 \times 0{,}35 \times p = 1750p$ €. Cette expression augmente avec p, donc on la calcule aux deux bornes de l'intervalle obtenu en Q11.

Proportion	Manque à gagner mensuel
$0{,}498943842$	$873{,}15$ €
$0{,}551056158$	$964{,}35$ €

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le manque à gagner mensuel est compris entre $873{,}15$ € et $964{,}35$ €.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2025)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2025, code 25MATGRB1. D'une durée de deux heures, elle concerne des spécialités aux coefficients 2 ou 3 en Traitement des matériaux. Elle étudie le refroidissement d'une plaque d'aluminium et une situation de café, mobilisant équations différentielles, fonctions exponentielles, probabilités et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut $1/\lambda$ et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.
- La formule des probabilités totales permet de calculer la probabilité d'une boisson chaude à partir des lieux de service.
- L'intervalle de confiance fourni à 90 % est $[f - 1{,}65\sqrt{f(1-f)/n} ; f + 1{,}65\sqrt{f(1-f)/n}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution générale de l'équation différentielle et celle qui respecte la condition initiale.
- Convertir les durées en unités cohérentes, notamment les secondes en minutes pour la fonction de refroidissement.
- Dans l'arbre pondéré, inscrire les probabilités conditionnelles sur les branches et multiplier les probabilités le long d'un chemin.
- Présenter l'intervalle de confiance et le manque à gagner avec des bornes cohérentes, en euros pour ce dernier.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver le paramètre d'une loi exponentielle à partir du temps d'attente moyen ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut $1/\lambda$. Si le temps d'attente moyen est de 4 minutes, on utilise $\lambda = 1/4$, soit 0,25 par minute.

Q : Comment comparer les chances d'un service en salle ou en terrasse sachant que la boisson est chaude ?

Il faut comparer les probabilités conditionnelles de chaque lieu sachant que la boisson est chaude. On divise, pour chaque lieu, la probabilité de l'intersection par la probabilité d'une boisson chaude.

Q : Que signifie un intervalle de confiance à 90 % dans cet exercice ?

L'intervalle est construit à partir de l'échantillon et de la formule fournie pour estimer la proportion inconnue. Le niveau de 90 % ne garantit pas que la proportion réelle appartienne nécessairement à l'intervalle obtenu.

Q : Le sujet donne-t-il le détail des points attribués à chaque question ou des critères de notation ?

Le sujet indique 10 points pour chacun des deux exercices, mais ne détaille pas la répartition entre les questions. Il faut justifier les calculs, respecter les arrondis demandés et interpréter les résultats dans leur contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2025/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.