Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS GPME

Mathématiques - BTS Métiers de l'eau, Groupement D2

Session 2024 • Code sujet : **24MATGRD2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Probabilités et lois autour des coccinelles (12 questions) **Page 3**

2. Modélisation de la transition entre deux teneurs en matière grasse (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 9-Sujet.pdf

1. Probabilités et lois autour des coccinelles

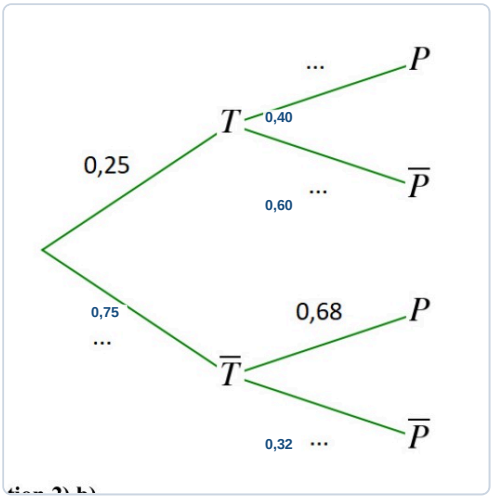
L'exercice étudie les coccinelles d'une forêt et d'un élevage selon leur taille, leur pronotum, leur ponte et leur durée de vie. Il mobilise des probabilités conditionnelles, des lois binomiale, uniforme et normale, ainsi qu'un test bilatéral sur une moyenne.

Question 1

Question 1) a). Compléter sur l'annexe à rendre avec la copie l'arbre de probabilités modélisant la taille des coccinelles et le type de pronotum, à partir des données fournies.

Les premières branches portent **0,25** pour T et **0,75** pour $\overline{T}$. Depuis T, les probabilités sont 0,40 vers P et 0,60 vers $\overline{P}$. Depuis $\overline{T}$, elles sont 0,68 vers P et 0,32 vers $\overline{P}$.

Arbre de probabilités complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : 0,25 ; 0,75 ; 0,40 ; 0,60 ; 0,68 ; 0,32.

Question 1) b). Déterminer la probabilité qu'une coccinelle prélevée au hasard ait une taille inférieure ou égale à 5 mm et n'ait pas un pronotum de type P.

L'événement recherché suit la branche T puis $\overline{P}$. On multiplie donc la probabilité de T par la probabilité conditionnelle de $\overline{P}$ sachant T : $P(A) = 0,25 \times (1 - 0,40) = 0,15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A) = 0,150$.

Question 1) c). **Déterminer la probabilité qu'une coccinelle prélevée au hasard dans la forêt n'ait pas un pronotum de type P.**

Taille	Calcul pour $\overline{P}$
T	$0,25 \times 0,60 = 0,15$
$\overline{T}$	$0,75 \times 0,32 = 0,24$

Les deux cas étant incompatibles, on additionne leurs probabilités : $P(\overline{P}) = 0,15 + 0,24 = 0,39$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(\overline{P}) = 0,390$.

Question 1) d). **Déterminer la probabilité qu'une coccinelle ait une taille inférieure ou égale à 5 mm sachant qu'elle n'a pas un pronotum de type P.**

$$P(T \mid \overline{P}) = \frac{P(T \cap \overline{P})}{P(\overline{P})}.$$

Le numérateur vaut 0,15 et le dénominateur 0,39. Ainsi, $P(T \mid \overline{P}) = 0,15/0,39$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \mid \overline{P}) \approx 0,385$.

Question 2

Question 2) a). **Pour un échantillon de 10 coccinelles prélevées dans les conditions indiquées, donner la loi suivie par la variable aléatoire X, qui compte les coccinelles à deux points, et préciser ses paramètres, sans justification.**

La variable compte les coccinelles à deux points lors de 10 tirages assimilés à des tirages avec remise. Chaque tirage a une probabilité de succès égale à 0,15. La loi est donc binomiale, de paramètres 10 et 0,15.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0,15)$.

Question 2) b). **Calculer la probabilité d'obtenir au moins une coccinelle à deux points dans un prélèvement de 10 coccinelles.**

1. La probabilité de n'en tirer aucune est $(1 - 0,15)^{10} = 0,85^{10}$.
2. Par complément, la probabilité d'en obtenir au moins une est $1 - 0,85^{10}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X \geq 1) \approx 0,803$.

Question 3

Question 3) a). La taille d'une coccinelle de l'élevage suit une loi uniforme sur [3 ; 6]. Calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 4 mm et 5 mm.

Pour une loi uniforme sur $[3;6]$, la probabilité d'appartenir à $[4;5]$ est le rapport entre la longueur de l'intervalle demandé et celle de l'intervalle total : $\frac{5-4}{6-3} = \frac{1}{3}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité vaut $\frac{1}{3}$, soit environ 0,333.

Question 3) b). Déterminer la taille moyenne des coccinelles de l'élevage modélisé par cette loi uniforme.

Pour une loi uniforme sur $[a;b]$, la moyenne est $\frac{a+b}{2}$.

Avec les bornes 3 mm et 6 mm, la taille moyenne est $\frac{3+6}{2} = 4,5$ mm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La taille moyenne est de 4,5 mm.

Question 4

Question 4) a). Le nombre d'œufs par ponte suit une loi normale d'espérance 35 et d'écart-type 6. Donner le nombre moyen d'œufs par ponte.

Pour cette loi normale, le nombre moyen d'œufs par ponte est son espérance, donnée dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

35 œufs par ponte.

Question 4) b). Calculer la probabilité que le nombre d'œufs U d'une ponte soit compris entre 31 et 39, bornes incluses.

La loi est centrée en 35. En réduisant, les bornes 31 et 39 correspondent à $-4/6$ et $4/6$ écarts-types. Ainsi, $P(31 \leq U \leq 39) = P(-2/3 \leq Z \leq 2/3)$, où Z suit la loi normale centrée réduite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(31 \leq U \leq 39) \approx 0,495.$

Question 4) c). Déterminer un entier h tel que la probabilité que U soit compris entre 35 − h et 35 + h soit égale à environ 0,95 à 10^{-2} près, puis interpréter cette probabilité dans le contexte.

1. Pour une probabilité centrale de 0,95, la loi normale donne environ 1,96 écarts-types : $h \approx 1,96 \times 6 = 11,76$.
2. L'entier $h = 12$ donne $P(23 \leq U \leq 47) \approx 0,9545$, soit 0,95 à 10^{-2} près.

Environ 95 % des pontes comptent donc entre 23 et 47 œufs.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h = 12$: environ 95 % des pontes comptent entre 23 et 47 œufs.

Question 5

Question 5). À partir de l'échantillon de 80 larves dont la durée de vie moyenne observée est de 18 jours, utiliser un test bilatéral relatif à une moyenne et l'intervalle de confiance fourni pour déterminer si l'annonce du vendeur peut être remise en question au seuil de confiance de 95 %.

Sous l'annonce du vendeur, l'intervalle de confiance à 95 % est centré sur 20 jours, avec une marge de $1,96 \times 3/\sqrt{80}$.

- Intervalle : $[19,343\,;\,20,657]$ jours.
- La moyenne observée, 18 jours, est en dehors de cet intervalle.

L'annonce du vendeur est donc remise en question au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui. 18 jours est inférieur à l'intervalle de confiance $[19,343\,;\,20,657]$ jours.

2. Modélisation de la transition entre deux teneurs en matière grasse

Une ligne de production agroalimentaire passe en continu d'une variété contenant idéalement 8,6 % de matière grasse à une variété en contenant 15,2 %, commercialisable dès que sa teneur dépasse 14,9 %. Les trois parties étudient des ajustements, des fonctions exponentielles, un algorithme de recherche du seuil et une intégrale appliquée à la production.

Partie A

Question Partie A - 1). À partir du nuage de points représentant la teneur en matière grasse en fonction du temps, dire si un ajustement linéaire paraît approprié et justifier la réponse.

Les points montent, mais les écarts de teneur diminuent à mesure que le temps augmente : la progression est rapide au début, puis le nuage s'aplatit. Une droite aurait une pente constante et ne rendrait pas compte de cette évolution. Un ajustement linéaire ne paraît donc pas approprié pour représenter l'ensemble des mesures observées sur le graphique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le nuage est courbe et s'aplatit progressivement.

Question Partie A - 2) a). Compléter le tableau des valeurs de $z_i = \ln(0{,}152 - y_i)$ en calculant les deux valeurs manquantes, arrondies à 10^{-3}.

Pour chaque valeur manquante, on utilise la définition donnée, avec la teneur correspondante du tableau. Le logarithme est calculé sur la différence entre la teneur idéale 0,152 et la valeur mesurée. Les deux résultats ci-dessous sont arrondis au millième, conformément à la consigne.

Temps	Calcul	Valeur de z
t = 1	$\ln(0,152 - 0,108) = \ln(0,044)$	$-3,124$
t = 2	$\ln(0,152 - 0,121) = \ln(0,031)$	$-3,474$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $z_1 = -3,124$ et $z_2 = -3,474$.

Question Partie A - 2) b). À l'aide de la calculatrice et de la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage $(t_i ; z_i)$ sous la forme $z = at + b$, avec a et b arrondis à 10^{-3}.

On effectue la régression linéaire sur les onze couples du tableau, en utilisant les valeurs de z_i affichées, arrondies au millième. La pente est $a \approx -0,435$. La moyenne des valeurs de z_i vaut environ $-4,833$, et l'ordonnée à l'origine se déduit de $b = \bar{z} - 5a$. Après arrondi au millième, l'équation obtenue est :

$$z = -0,435t - 2,658.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$z = -0,435t - 2,658.$

Question Partie A - 2) c). En prenant a = −0,44 et b = −2,7, déterminer une expression de la fonction y qui ajuste le nuage de points (t_i ; y_i) dans le cadre de cette modélisation.

La modélisation donne $z = \ln(0,152 - y)$. En remplaçant z par $-0,44t - 2,7$, puis en appliquant l'exponentielle, on obtient $0,152 - y = e^{-0,44t-2,7}$. Il reste à isoler la teneur y. Cette transformation conserve le signe négatif devant l'exponentielle, puisque celle-ci représente l'écart à la valeur limite 0,152.

$$y(t) = 0,152 - e^{-0,44t-2,7}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 0,152 - e^{-0,44t-2,7}.$

Partie B

Question Partie B - 1) a). La teneur est modélisée par C(t) = 0,152 − 0,067e$^{-0,44t}$. Calculer C(2), arrondi à 10^{-3}, puis interpréter le résultat dans la situation étudiée.

On remplace t par 2 dans la fonction donnée :

$$C(2) = 0,152 - 0,067e^{-0,44\times 2} \approx 0,124.$$

La fonction exprime la teneur sous forme décimale : 0,124 correspond à environ 12,4 %. Deux minutes après le début de la transition, la teneur modélisée reste donc inférieure au seuil de commercialisation de 0,149, soit 14,9 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$C(2) \approx 0,124$, soit environ 12,4 % de matière grasse.

Question Partie B - 1) b). Calculer la dérivée de C, en déduire le sens de variation de C sur [0 ; 10], puis indiquer si ce résultat est cohérent avec la situation étudiée.

La dérivée de l'exponentielle composée s'obtient en multipliant par la dérivée de son exposant :

$$C'(t) = -0,067(-0,44)e^{-0,44t} = 0,02948e^{-0,44t}.$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, $C'(t) > 0$ sur $[0;10]$. La fonction C est donc strictement croissante sur cet intervalle. Cela concorde avec l'injection continue de matière grasse pendant la transition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$C'(t) = 0,02948e^{-0,44t} > 0$: C est strictement croissante sur $[0;10]$.

Question Partie B - 2). Déterminer la valeur numérique renvoyée par l'algorithme fourni, qui augmente M tant que D ≤ 0,149 et remplace D par C(M).

L'algorithme commence avec $M = 0$ et $D = 0,085$. Il répète les opérations tant que $D \leq 0,149$:

1. Pour $M = 7$, $D = C(7) \approx 0,148921$, donc la boucle continue.
2. Il passe à $M = 8$, puis $D = C(8) \approx 0,150170$. La condition devient fausse.

L'algorithme renvoie alors la valeur de M.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme renvoie 8.

Question Partie B - 3) a). L'équation C(t) = 0,149 admet une unique solution T sur [0 ; 10]. Déterminer une valeur approchée de T à 10^{-2} près.

On isole l'exponentielle dans l'équation du seuil, puis on prend le logarithme népérien :

$$0,152 - 0,067e^{-0,44T} = 0,149 \quad \Longrightarrow \quad e^{-0,44T} = \frac{0,003}{0,067}.$$

Ainsi, $T = \frac{\ln(0,003/0,067)}{-0,44} \approx 7,0593$. Arrondie au centième de minute, cette valeur donne la solution demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T \approx 7,06$ minutes.

Question Partie B - 3) b). Déduire de la valeur de T le temps, à la seconde près, à attendre après le début de la transition pour obtenir une variété M2 commercialisable.

La valeur non arrondie du temps seuil est $T \approx 7,059273$ minutes. La partie entière donne 7 minutes ; la partie décimale correspond à $(7,059273 - 7) \times 60 \approx 3,56$ secondes, soit 4 secondes à la seconde près. Le seuil est atteint à cet instant ; la teneur le dépasse juste après, conformément au critère strict de commercialisation.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Environ 7 min 4 s après le début de la transition.

Partie C

Question Partie C - 1). Pour f(t) = 0,152 − 0,062e$^{-0,5t}$ et F(t) = 0,152t + 0,124e$^{-0,5t}$, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; 10].

On dérive séparément les deux termes de F. La dérivée de $0,152t$ est $0,152$, et celle de $0,124e^{-0,5t}$ est $0,124(-0,5)e^{-0,5t}$. Ainsi, pour tout $t \in [0;10]$,

$$F'(t) = 0,152 - 0,062e^{-0,5t} = f(t).$$

Par définition, une fonction dont la dérivée est f est une primitive de f. La vérification est donc établie sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f sur $[0;10]$.

Question Partie C - 2) a). En utilisant la primitive F, établir que l'arrondi à 10^{-4} de l'intégrale de f entre 0 et 6 est 0,7942.

Le théorème fondamental de l'analyse permet d'utiliser la primitive trouvée à la question précédente :

$$\int_0^6 f(t)\,dt = F(6) - F(0) = (0,152 \times 6 + 0,124e^{-3}) - 0,124 \approx 0,794174.$$

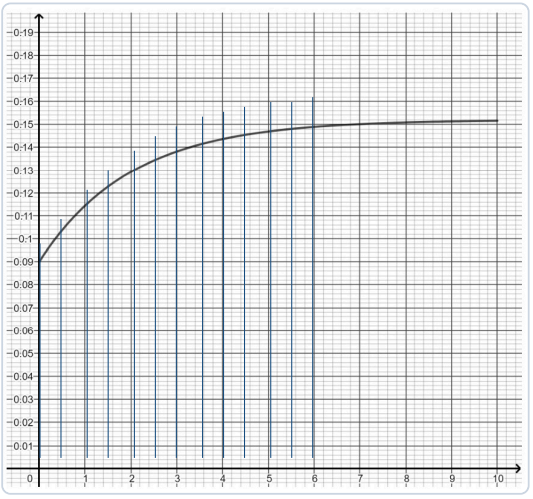
En arrondissant cette aire à 10^{-4}, on obtient bien la valeur annoncée. L'intégrale représente l'aire sous la courbe de teneur entre les temps 0 et 6.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\int_0^6 f(t)\,dt \approx 0,7942.$

Question Partie C - 2) b). Sur le graphique de l'annexe à rendre avec la copie, hachurer le domaine dont l'aire est égale à l'intégrale de f entre 0 et 6.

L'aire demandée est celle comprise sous la courbe de f, au-dessus de l'axe horizontal, entre les abscisses 0 et 6. Le visuel annote ces limites sur le graphique de l'annexe et représente le hachurage par des traits verticaux répartis dans le domaine. La borne droite doit être placée en $t = 6$, et non en $t = 10$.

Aire sous la courbe entre 0 et 6



✓ RÉPONSE À RETENIR

Hachurer sous la courbe entre $t = 0$ et $t = 6$, au-dessus de l'axe horizontal.

Question Partie C - 3). On note m = 1/6 ∫₀⁶ f(t) dt. Calculer m, arrondir le résultat à 10^{-3} et interpréter la valeur obtenue dans le contexte de l'exercice.

La teneur moyenne sur les six premières minutes est l'intégrale divisée par la durée correspondante. En utilisant la valeur non arrondie de l'intégrale,

$$m = \frac{1}{6}\int_0^6 f(t)\,dt \approx \frac{0,794174}{6} \approx 0,132362.$$

L'arrondi au millième est donc 0,132. Comme la teneur est exprimée sous forme décimale, cela correspond à une teneur moyenne d'environ 13,2 % sur cette période.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m \approx 0,132$, soit une teneur moyenne d'environ 13,2 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2024)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Métiers de l'eau, Groupement D2, session 2024, code 24MATGRD2 : 2 heures, coefficient 1,5. Deux exercices de 10 points portent sur les coccinelles et la modélisation d'une transition agroalimentaire de teneur en matière grasse. Les compétences évaluées couvrent probabilités, lois usuelles, test bilatéral, ajustement, algorithmique, dérivation et intégration.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour des événements A et B, P(A sachant B) = P(A ∩ B) / P(B), si P(B) est non nulle.
- Pour n tirages indépendants de probabilité de succès p, le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p.
- L'intervalle de confiance fourni pour une moyenne est [m − 1,96σ/√n ; m + 1,96σ/√n].
- L'intégrale d'une fonction continue représente l'aire algébrique sous sa courbe, et sa valeur moyenne sur [a ; b] est l'intégrale divisée par b − a.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans un arbre pondéré, placer les probabilités conditionnelles sur les branches et vérifier que les probabilités issues de chaque nœud totalisent 1.
- Pour calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès, calculer d'abord celle de n'en obtenir aucun, puis prendre la probabilité contraire.
- Dans le test bilatéral, comparer la moyenne observée aux bornes de l'intervalle et conclure explicitement dans le contexte.
- Dans les modèles de production, distinguer le temps en minutes, la teneur exprimée entre 0 et 1 et le seuil strict de commercialisation.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle à partir d'un arbre ?

La probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les probabilités portées par ses branches. Pour calculer P(A sachant B), on divise P(A ∩ B) par P(B), à condition que P(B) soit non nulle.

Q : Comment reconnaître la loi binomiale dans le prélèvement de coccinelles ?

Une loi binomiale modélise le nombre de succès dans un nombre fixé de tirages indépendants, lorsque chaque tirage a la même probabilité de succès. Ici, le succès est le prélèvement d'une coccinelle à deux points.

Q : Comment organiser son temps dans cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, des questions indépendantes dans le premier et trois parties indépendantes dans le second. Repérez les questions accessibles, répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les arrondis et l'annexe.

Q : Qu'attend-on pour conclure le test bilatéral sur la durée de vie ?

Il faut calculer les bornes de l'intervalle de confiance avec les données fournies, situer la moyenne observée par rapport à cet intervalle, puis conclure explicitement si les résultats permettent ou non de remettre en question l'annonce.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 9-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.