Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2024 • Code sujet : **24MATGRC2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Séchage et teneur en humidité du bois d'épicéa (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, défauts et conformité des vis (11 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 7-Sujet.pdf

1. Séchage et teneur en humidité du bois d'épicéa

L'exercice étudie la diminution de la teneur en humidité d'une poutre en épicéa au cours du séchage. Un relevé statistique, un tableau de données, des graphiques et un modèle exponentiel servent à analyser cette évolution et à déterminer le temps nécessaire pour atteindre un seuil de vente.

Partie A - Étude statistique

Question 1. À partir du nuage de points représentant la teneur en humidité selon le temps, indiquer si un ajustement affine semble approprié et expliquer la réponse.

Le nuage ne suit pas une droite : la teneur baisse fortement au début, puis sa diminution ralentit. Les points dessinent une courbe décroissante plutôt qu'un alignement approximatif. Un modèle affine ne rendrait donc pas correctement compte de l'évolution observée sur toute la période. Un ajustement non affine, comme un modèle exponentiel, semble plus adapté à ces données.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, un ajustement affine ne semble pas approprié.

Question 2.a. Compléter le tableau en calculant, au centième près, la valeur manquante de y = ln(H - 0,1) pour t = 30 semaines.

Pour le temps demandé, le tableau indique une teneur de 0,32. On applique directement la transformation définie dans l'énoncé :
$y = \ln(H - 0,1) = \ln(0,32 - 0,1) = \ln(0,22) \approx -1,514$.
Arrondie au centième, cette valeur est $-1,51$. Le logarithme est calculé sur l'écart entre la teneur et 0,1, et non sur la teneur seule.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = -1,51$

Question 2.b. Sans justification, donner une équation de la droite d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés, avec les coefficients arrondis au millième.

La question demande seulement l'équation de la droite d'ajustement de y en fonction de t, sans justification. Avec les coefficients arrondis au millième, le coefficient directeur est $-0,039$ et l'ordonnée à l'origine est $-0,357$. On écrit l'équation sous la forme $y = at + b$, en respectant ces arrondis.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = -0,039t - 0,357$

Question 2.c. À partir de la droite d'ajustement obtenue pour y en fonction de t, déduire un ajustement de H en fonction de t.

La définition $y = \ln(H - 0,1)$ permet d'exprimer H en fonction de y. En exponentiant, on obtient $H - 0,1 = e^y$, donc $H = e^y + 0,1$. Il suffit alors de remplacer y par la droite trouvée à la question précédente. Cette expression fournit l'ajustement demandé de H en fonction du temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $H(t) \approx e^{-0,039t-0,357} + 0,1$

Question 2.d. À l'aide du modèle H(t) = 0,7e^(-0,04t) + 0,1, calculer la teneur en humidité après 70 semaines et arrondir le résultat au millième.

On utilise le modèle donné en remplaçant le temps par 70 semaines :
$H(70) = 0,7e^{-0,04\times 70} + 0,1 \approx 0,143$.
Le modèle exprime la teneur sous forme décimale, comme dans le tableau et sur le graphique où $0,1$ correspond à 10 %. Ainsi, $0,143$ correspond à environ 14,3 %. La valeur décimale est arrondie au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $H(70) \approx 0,143$, soit environ 14,3 %.

Question 2.e. À partir du modèle donné, déterminer s'il est possible que la teneur en humidité du bois soit inférieure à 5 %.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,04t}$ est strictement positive. Par conséquent, $0,7e^{-0,04t} > 0$, et le modèle donne toujours $H(t) > 0,1$. Or $0,1$ représente 10 %, valeur déjà supérieure à 5 %. La teneur ne peut donc jamais devenir inférieure à 5 % selon ce modèle.

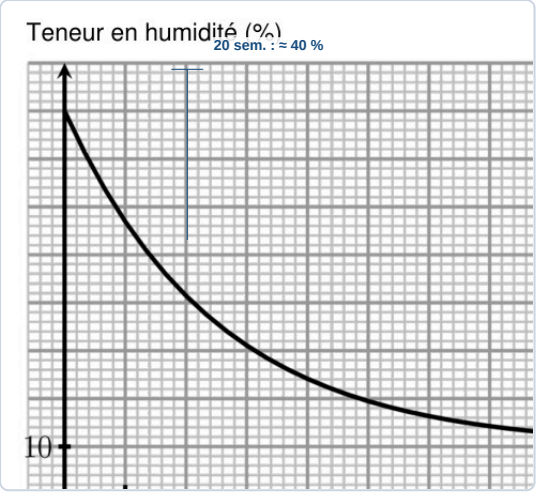
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le modèle donne toujours une teneur supérieure à 10 %.

Partie B - Temps de séchage

Question 1. À l'aide du graphique de la fonction f représentant la teneur en humidité en fonction du temps, estimer la teneur d'une poutre après 20 semaines de séchage.

On repère 20 semaines sur l'axe horizontal, puis on lit la valeur correspondante sur la courbe. La lecture est graphique et donc approximative. À cette abscisse, l'ordonnée est proche de $0,4$, soit 40 % d'humidité. Le repère annoté indique la lecture au point de la courbe, sans prétendre donner une valeur exacte.

Lecture graphique à 20 semaines



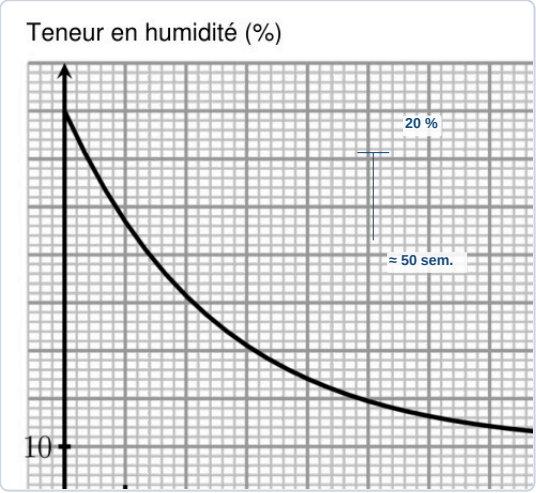
✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 20 semaines, la teneur est d’environ 40 %.

Question 2. Les poutres sont vendues lorsque leur teneur en humidité est inférieure à 20 %. Lire sur le graphique au bout de combien de temps cette condition est atteinte.

Le seuil de vente est 20 %, représenté par le niveau correspondant sur l’axe vertical. On repère son intersection avec la courbe, puis on lit l’abscisse de ce point sur l’axe du temps. La lecture du graphique donne environ 50 semaines. Comme la courbe décroît, la teneur devient ensuite inférieure au seuil et la condition de vente est satisfaite.

Lecture graphique du seuil de vente



✓ RÉPONSE À RETENIR

La condition est atteinte après environ 50 semaines.

Partie C - Teneur en humidité

Question 1.a. Donner la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞, puis interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-0,04t}$ tend vers 0. Dans l'expression $f(t) = 0,7e^{-0,04t} + 0,1$, le terme exponentiel disparaît donc à la limite et il reste $0,1$. Dans le contexte, la teneur en humidité du bois se rapproche de 10 % au cours du séchage, sans atteindre cette limite dans le modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite est $0,1$, soit 10 % d'humidité.

Question 1.b. À partir du contexte, conjecturer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[.

Le contexte décrit le séchage du bois : au fil du temps, l'eau contenue dans la poutre diminue. On peut donc conjecturer que la teneur en humidité baisse sur tout l'intervalle étudié. La fonction f semble ainsi décroissante sur $[0;+\infty[$. Il s'agit ici d'une conjecture à partir du contexte, qui sera confirmée par l'étude de la dérivée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On conjecture que f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Question 1.c. Étudier les variations de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, la dérivée est $f'(t) = 0,7 \times (-0,04)e^{-0,04t} = -0,028e^{-0,04t}$. Comme l'exponentielle est positive, $f'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 0,8$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0,1$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	0,8	$\searrow 0,1$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 0,8 vers 0,1.

Question 2.a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'inéquation f(t) ≤ 0,2 et arrondir le résultat à l'unité.

On résout l'inéquation sur le domaine indiqué :
$0,7e^{-0,04t} + 0,1 \leq 0,2 \iff e^{-0,04t} \leq \frac{1}{7}$.
La fonction logarithme étant croissante, cela équivaut à $-0,04t \leq -\ln(7)$, donc $t \geq \frac{\ln(7)}{0,04} \approx 48,649$. À l'unité près, le seuil est atteint au bout d'environ 49 semaines.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$t \geq 49$ semaines, à l'unité près.

Question 2.b. Interpréter dans le contexte du séchage le résultat obtenu en résolvant l'inéquation f(t) ≤ 0,2.

La résolution montre que la teneur devient inférieure ou égale à 20 % à partir d'environ 49 semaines. Dans le contexte, cela signifie que la poutre a atteint le seuil de teneur retenu pour le séchage. Le temps obtenu est une approximation à l'unité, issue du modèle mathématique, et s'exprime en semaines.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La teneur atteint au plus 20 % après environ 49 semaines de séchage.

2. Probabilités, défauts et conformité des vis

Une entreprise fabrique des vis sur deux chaînes de production présentant des proportions différentes de défauts. L'exercice mobilise les probabilités conditionnelles, une loi binomiale pour un lot de vis, puis une loi normale et un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la longueur et le réglage de la première chaîne.

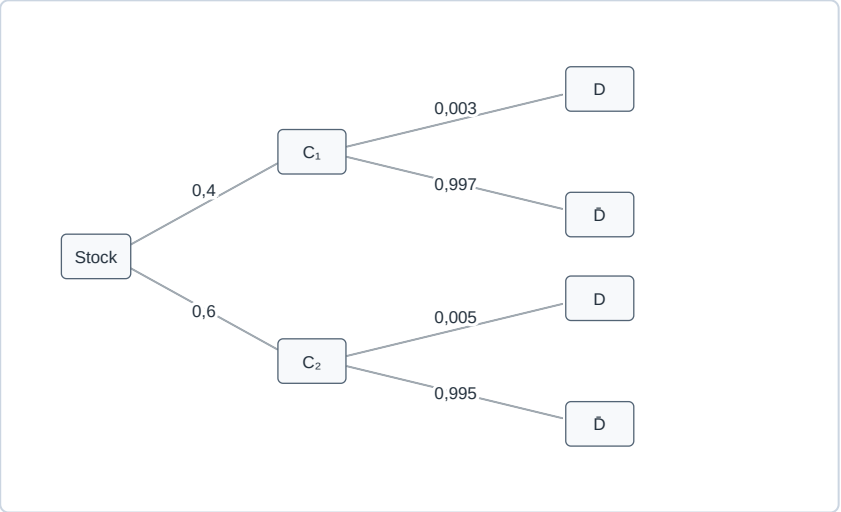
Partie A - Production de vis

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant l'origine des vis, la présence éventuelle d'un défaut et les probabilités associées aux branches.

Les probabilités des branches sont données par les proportions de production et les taux de défaut. Les branches « sans défaut » complètent chacune les probabilités des branches « défaut » jusqu'à 1.

- $P(C_1) = 0{,}4$; $P(C_2) = 0{,}6$;
- $P(D|C_1) = 0{,}003$; $P(\bar{D}|C_1) = 0{,}997$;
- $P(D|C_2) = 0{,}005$; $P(\bar{D}|C_2) = 0{,}995$.

Arbre pondéré de production des vis



Les branches $\bar{D}$ correspondent à l'absence de défaut.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Branches complétées : 0,4 ; 0,6 ; 0,003 ; 0,997 ; 0,005 ; 0,995.

Question 2. Déterminer la probabilité qu'une vis choisie au hasard provienne de la première chaîne et présente un défaut.

Pour que la vis provienne de la première chaîne et soit défectueuse, on multiplie la probabilité qu'elle provienne de cette chaîne par la probabilité conditionnelle d'un défaut : $P(C_1 \cap D) = P(C_1)P(D|C_1) = 0,4 \times 0,003 = 0,0012$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(C_1 \cap D) = 0,0012$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'une vis choisie au hasard dans le stock présente un défaut est égale à 0,0042.**

Les deux chaînes couvrent toute la production. D'après la formule des probabilités totales, $P(D) = P(C_1)P(D|C_1) + P(C_2)P(D|C_2)$. Donc $P(D) = 0,4 \times 0,003 + 0,6 \times 0,005 = 0,0042$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,0042$.

Question 4. **Sachant qu'une vis choisie présente un défaut, déterminer si la probabilité qu'elle provienne de la première chaîne est inférieure à 25 %, et justifier la réponse.**

Par la formule des probabilités conditionnelles, $P(C_1|D) = \frac{P(C_1 \cap D)}{P(D)}$. En utilisant les résultats précédents, $P(C_1|D) = \frac{0,0012}{0,0042} \approx 0,286$, soit environ 28,6 %. Cette probabilité dépasse 25 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la probabilité est d'environ 28,6 %, donc supérieure à 25 %.

Partie B - Étude d'un lot

Question 1. **Expliquer pourquoi le nombre X de vis défectueuses parmi 50 suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.**

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli, avec une probabilité de défaut égale à 0,004. Le tirage avec remise rend les 50 épreuves indépendantes et leur probabilité de succès reste identique. Le nombre de vis défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres 50 et 0,004.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,004)$.

Question 2.a. **Calculer, au millième près, la probabilité qu'un lot de 50 vis contienne exactement 2 vis défectueuses.**

Pour une loi binomiale, la probabilité d'obtenir exactement deux défauts est $P(X = 2) = \binom{50}{2}(0,004)^2(0,996)^{48}$. Le calcul donne environ 0,01617, soit 0,016 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 2) \approx 0,016$.

Question 2.b. **Calculer, au millième près, la probabilité qu'un lot de 50 vis contienne au moins 3 vis défectueuses.**

On utilise l'événement contraire : $P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$. Avec $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,004)$, on obtient environ 0,00109, soit 0,001 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X \geq 3) \approx 0,001$.

Partie C - Conformité des vis

Question 1. **En supposant que la longueur d'une vis suit une loi normale de moyenne 60 mm et d'écart type 0,25 mm, calculer au centième près la probabilité qu'elle soit conforme, c'est-à-dire comprise entre 59,60 mm et 60,40 mm.**

La variable centrée réduite associée à la longueur est $Z = \frac{L-60}{0,25}$. Les bornes 59,60 et 60,40 donnent respectivement $-1,6$ et $1,6$. Ainsi, $P(59,60 \leq L \leq 60,40) = P(-1,6 \leq Z \leq 1,6) \approx 0,8904$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité de conformité : $0,89$.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral au seuil de risque de 5 % dont l'hypothèse nulle est H0 : μ = 60, énoncer l'hypothèse alternative H1.**

Le test étant bilatéral, l'hypothèse alternative indique que la moyenne des longueurs est différente de 60 mm, sans préciser le sens de l'écart.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $H_1 : \mu \neq 60$.

Question 2.b. **À partir de P(59,95 ≤ $\bar{L}$ ≤ 60,05) = 0,95 sous H0, énoncer la règle de décision du test portant sur la moyenne des longueurs d'un échantillon de 100 vis.**

L'intervalle $[59,95\,;\,60,05]$ est l'intervalle d'acceptation de H_0 au seuil de 5 %. On ne rejette pas H_0 si la moyenne observée appartient à cet intervalle ; on la rejette si elle est à l'extérieur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Rejeter H_0 si $\overline{L} < 59,95$ ou $\overline{L} > 60,05$; sinon, ne pas la rejeter.

Question 2.c. **Appliquer le test à un échantillon de 100 vis dont la longueur moyenne mesurée est 60,03 mm, puis conclure quant au réglage de la première chaîne de production.**

La moyenne mesurée, 60,03 mm, appartient à l'intervalle $[59,95\,;\,60,05]$. Selon la règle de décision, on ne rejette donc pas H_0 au seuil de 5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On ne rejette pas H_0 : l'échantillon ne met pas en évidence un mauvais réglage au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2024)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS groupement C2, session 2024, porte le code 24MATGRC2, dure deux heures et a un coefficient 1. Elle étudie le séchage du bois d'épicéa et la fabrication de vis. Les compétences évaluées concernent l'ajustement statistique, les fonctions exponentielles, les probabilités, les lois binomiale et normale ainsi que le test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Avec y = ln(H - 0,1), un ajustement affine de y en t permet de retrouver un modèle de H par exponentiation.
- Pour f(t) = 0,7e^(-0,04t) + 0,1, la limite en +∞ est 0,1 et la dérivée est négative sur [0 ; +∞[.
- Pour n essais indépendants de probabilité de défaut p, le nombre de défauts suit une loi binomiale B(n, p).
- Pour un test bilatéral au risque de 5 %, on rejette H0 si la moyenne observée est hors de l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier que l'ajustement affine est appliqué aux données transformées y, et non directement à H.
- Respecter les unités et les échelles du sujet : la teneur est donnée sous forme décimale et le graphique indique notamment 0,1 pour 10 %.
- Dans l'arbre, distinguer les probabilités des chaînes et les probabilités conditionnelles de défaut.
- Pour le test bilatéral, comparer la moyenne observée aux deux bornes et formuler une conclusion en contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment retrouver un modèle de teneur en humidité à partir de l'ajustement de y ?

On part de y = ln(H - 0,1). Si la droite d'ajustement est y = at + b, on applique l'exponentielle : H = e^(at+b) + 0,1. Il faut conserver les variables et unités définies dans le tableau.

Q : Pourquoi le nombre de vis défectueuses suit-il une loi binomiale ?

Le lot comporte 50 prélèvements assimilés à des tirages avec remise. Chaque vis a la même probabilité de défaut, 0,004, et les résultats sont indépendants. Le nombre de défauts suit donc B(50 ; 0,004).

Q : Comment organiser son temps pour cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices indépendants de 10 points chacun. Une organisation équilibrée consiste à réserver environ une heure par exercice, en gardant du temps pour vérifier les calculs, les arrondis, les unités et les conclusions rédigées.

Q : Que faut-il conclure lorsqu'une moyenne d'échantillon est dans l'intervalle du test ?

Si la moyenne observée appartient à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H0, on ne rejette pas H0 au seuil de 5 %. L'échantillon ne fournit pas d'élément suffisant pour remettre en cause le réglage visé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 7-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.