Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement C1

Session 2024 • Code sujet : **24MATGRC1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Innovation textile et Pilotage des procédés : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Séchage et teneur en humidité du bois d'épicéa (12 questions) **Page 3**

2. Production et conformité de vis (11 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 6-Sujet.pdf

1. Séchage et teneur en humidité du bois d'épicéa

L'exercice porte sur des poutres en épicéa de 4 m de long, à base carrée de 5 cm de côté, et sur leur séchage. Il étudie la surface exposée à l'air, l'évolution de la teneur en humidité et le moment où les poutres peuvent être vendues.

Partie A - Modélisation de la teneur en humidité

Question 1. En utilisant exclusivement des valeurs exactes, montrer que si 96 % de la surface extérieure d'une poutre est exposée à l'air, l'aire de bois exposée vaut 0,7728 m².

Le côté du carré vaut 0,05 m. La surface totale du pavé est **$2(4 \times 0{,}05 + 4 \times 0{,}05 + 0{,}05^2) = 0{,}805$ m²**. La surface exposée représente 96 % de cette aire : $0{,}96 \times 0{,}805 = 0{,}7728$ m².

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aire exposée : 0,7728 m².

Question 2.a. Vérifier que la fonction g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 0,1 est une solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,03864y = 0,003864.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche, on obtient $0 + 0{,}03864 \times 0{,}1 = 0{,}003864$, égal au second membre. Ainsi, g est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g(t) = 0,1 est une solution particulière de (E).

Question 2.b. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène y' + 0,03864y = 0.

L'équation homogène du premier ordre $y' + 0{,}03864y = 0$ a pour solutions les fonctions exponentielles de la forme $y(t) = Ce^{-0{,}03864t}$, où C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}03864t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2.c. Déduire des résultats précédents les solutions de l'équation différentielle y' + 0,03864y = 0,003864.

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène. On ajoute donc 0,1 à $Ce^{-0{,}03864t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,03864t} + 0,1$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2.d. **Déterminer la fonction f définie sur [0 ; +∞[, solution de l'équation différentielle, sachant que la teneur en humidité initiale, au temps t = 0, est de 80 %.**

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0,03864t} + 0,1$. La condition initiale donne $f(0) = C + 0,1 = 80$, donc $C = 79,9$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 79,9e^{-0,03864t} + 0,1$.

Partie B - Temps de séchage

Question 1. **À l'aide du graphique et avec la précision qu'il permet, déterminer la teneur en humidité d'une poutre après 20 semaines de séchage.**

À l'abscisse t = 20 semaines, la lecture de l'ordonnée sur le graphique donne une teneur proche de 40 %. C'est une estimation graphique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 20 semaines : environ 40 %.

Question 2. **Les poutres sont vendues lorsque leur teneur en humidité est inférieure à 20 %. À l'aide du graphique, estimer au bout de combien de temps elles peuvent être vendues.**

Sur le graphique, la courbe atteint 20 % vers 50 semaines. Les poutres deviennent vendables juste après ce franchissement, lorsque la teneur passe sous 20 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Vente possible après environ 50 semaines.

Partie C - Teneur en humidité

Question 1.a. **Pour f(t) = 0,7e^(-0,04t) + 0,1, donner la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**

Comme $e^{-0,04t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers +∞, f(t) tend vers 0,1. D'après la formule, f est exprimée sous forme de proportion : 0,1 correspond donc à 10 % d'humidité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La teneur tend vers 0,1, soit 10 % d'humidité.

Question 1.b. À l'aide du contexte, conjecturer les variations de la fonction f sur [0 ; +∞[.

Le séchage fait diminuer la quantité d'eau contenue dans le bois. On conjecture donc que f est décroissante sur [0 ; +∞[.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f semble décroissante sur [0 ; +∞[.

Question 1.c. Étudier les variations de la fonction f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -0{,}028e^{-0{,}04t}$. L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t) < 0$: f est strictement décroissante. La formule donne f(0) = 0,8 et une limite de 0,1, soit une évolution de 80 % vers 10 % si f est exprimée en proportion.

t	0	+∞
f'(t)		–
f(t)	0,8	↘ 0,1

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 0,8 à 0,1, soit de 80 % à 10 %.

Question 2.a. Résoudre, pour t appartenant à [0 ; +∞[, l'inéquation f(t) ≤ 0,2, puis arrondir le résultat à l'unité.

On résout $0{,}7e^{-0{,}04t} + 0{,}1 \leq 0{,}2$, soit $e^{-0{,}04t} \leq 1/7$. Le logarithme donne $-0{,}04t \leq -\ln(7)$, donc $t \geq \ln(7)/0{,}04 \approx 48{,}65$. À l'unité, le seuil est 49 semaines.

✓ RÉPONSE À RETENIR

t ≥ 48,65 semaines, soit environ 49 semaines à l'unité.

Question 2.b. Interpréter dans le contexte de l'exercice le résultat obtenu en résolvant l'inéquation f(t) ≤ 0,2.

La condition f(t) ≤ 0,2 est satisfaite à partir de 48,65 semaines environ. Comme les poutres sont vendues lorsque leur teneur est strictement inférieure à 20 %, elles peuvent être vendues juste après ce seuil, soit vers 49 semaines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les poutres peuvent être vendues après environ 49 semaines de séchage.

2. Production et conformité de vis

Une entreprise produit des vis en grande série sur deux chaînes qui ont des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités de défaut, un lot de 50 vis, la conformité des longueurs et un test portant sur le réglage de la première chaîne.

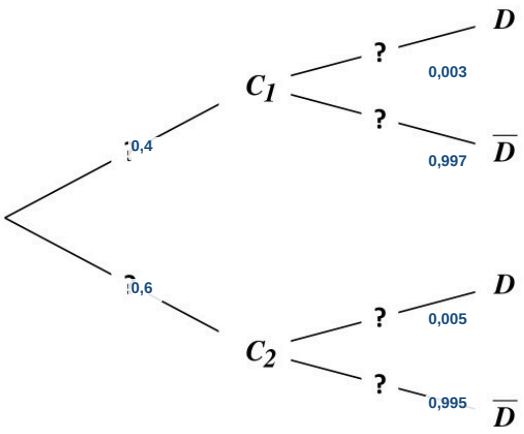
Partie A - Production de vis

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré avec les probabilités des événements C1, C2, D et de leurs contraires, sachant que la première chaîne produit 40 % du stock, que 3 vis sur 1000 y ont un défaut et que 5 vis sur 1000 en ont un sur la deuxième chaîne.

Au premier niveau, les branches portent les proportions de production : 0,4 pour C_1 et 0,6 pour C_2. À chaque chaîne, on inscrit le taux de défaut indiqué, puis sa probabilité complémentaire. Les probabilités conditionnelles sont donc $P(D|C_1)=0{,}003$ et $P(\bar{D}|C_1)=0{,}997$; $P(D|C_2)=0{,}005$ et $P(\bar{D}|C_2)=0{,}995$. L'arbre annoté distingue bien les proportions globales des taux propres à chaque chaîne.

Arbre pondéré complété

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

C_1 : 0,4 ; C_2 : 0,6 ; sous C_1 : D 0,003, $\bar{D}$ 0,997 ; sous C_2 : D 0,005, $\bar{D}$ 0,995.

Question 2. Déterminer la probabilité que la vis choisie provienne de la première chaîne et présente un défaut.

La probabilité recherchée correspond au chemin qui passe d'abord par C_1, puis par D. On multiplie la part du stock issue de la première chaîne par le taux de défaut sur cette chaîne : $P(C_1 \cap D) = P(C_1)P(D \mid C_1) = 0,4 \times 0,003 = 0,0012$. Il s'agit de la probabilité qu'une vis prise dans tout le stock vérifie simultanément ces deux conditions.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(C_1 \cap D) = 0,0012$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'une vis présente un défaut est égale à 0,0042.**

Les deux chaînes forment une partition du stock : toute vis provient de C_1 ou de C_2. Un défaut peut donc être obtenu par l'un ou l'autre de ces deux chemins. La formule des probabilités totales donne $P(D) = P(C_1)P(D \mid C_1) + P(C_2)P(D \mid C_2)$. En remplaçant par les taux et les proportions du sujet, on trouve $0,4 \times 0,003 + 0,6 \times 0,005 = 0,0042$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,0042$.

Question 4. **Sachant qu'une vis choisie présente un défaut, déterminer si l'affirmation selon laquelle elle a moins de 25 % de chances de provenir de la première chaîne de production est exacte.**

On cherche la probabilité que la vis provienne de C_1 sachant qu'elle est défectueuse. La probabilité conjointe calculée à la question précédente se rapporte à tout le stock ; on la divise donc par la probabilité totale d'un défaut : $P(C_1 \mid D) = \frac{0,0012}{0,0042} \approx 0,286$. Cette valeur dépasse 0,25, donc l'affirmation « moins de 25 % » est fausse.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : environ 28,6 %, soit plus de 25 %.

Partie B - Étude d'un lot

Question 1. **La probabilité qu'une vis ait un défaut vaut 0,004. Expliquer pourquoi le nombre X de vis défectueuses dans un lot de 50 vis suit une loi binomiale, puis préciser ses paramètres.**

Chaque vis prélevée correspond à une épreuve de Bernoulli : elle est défectueuse avec la probabilité constante $p = 0,004$. Le stock est suffisamment grand pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise ; les 50 épreuves sont donc indépendantes et de même probabilité. La variable X compte le nombre de succès, c'est-à-dire de vis défectueuses, au cours de ces 50 épreuves.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,004)$.

Question 2.a. **Calculer la probabilité qu'un lot de 50 vis contienne exactement 2 vis ayant un défaut. Arrondir au millième.**

Pour avoir exactement deux vis défectueuses, on choisit leurs deux positions parmi les 50 prélèvements. Les 48 autres vis ne sont pas défectueuses. Avec la loi binomiale, $P(X = 2) = \binom{50}{2}(0,004)^2(0,996)^{48} \approx 0,01617$. L'arrondi au millième demandé dans l'énoncé donne donc 0,016.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = 2) \approx 0,016$.

Question 2.b. **Calculer la probabilité qu'un lot de 50 vis contienne au moins 3 vis ayant un défaut. Arrondir au millième.**

On calcule l'événement contraire : le lot contient au plus deux vis défectueuses. Ainsi, $P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$. En utilisant la loi binomiale de paramètres 50 et 0,004, on obtient environ 0,00109. Arrondie au millième, la probabilité qu'au moins trois vis soient défectueuses vaut 0,001.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X \geq 3) \approx 0,001$.

Partie C - Conformité des vis

Question 1. **On suppose que la longueur L suit une loi normale de moyenne μ = 60 mm et d'écart type σ = 0,25 mm. Une vis est conforme si sa longueur est comprise entre 59,60 mm et 60,40 mm. Calculer la probabilité qu'une vis soit conforme et arrondir au centième.**

On centre et réduit les bornes de conformité : $\frac{59,60-60}{0,25} = -1,6$ et $\frac{60,40-60}{0,25} = 1,6$. Par symétrie de la loi normale centrée réduite, la probabilité cherchée est $P(-1,6 \leq Z \leq 1,6) = 2\Phi(1,6) - 1 \approx 2 \times 0,9452 - 1 = 0,8904$. Arrondie au centième, elle vaut 0,89.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'une vis soit conforme est $0,89$.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral relatif à la moyenne, au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse nulle est H0 : μ = 60. Énoncer l'hypothèse alternative H1.**

Le test est bilatéral : il vérifie si la moyenne des longueurs diffère de 60 mm, qu'elle soit inférieure ou supérieure à cette valeur. L'hypothèse alternative est donc le contraire de l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 60$. Elle s'écrit $H_1 : \mu \neq 60$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$H_1 : \mu \neq 60$.

Question 2.b. **Sous H0, la moyenne des longueurs d'un échantillon de 100 vis suit une loi normale d'espérance 60 et d'écart type 0,025. Sachant que P(59,95 ≤ L̄ ≤ 60,05) = 0,95, énoncer la règle de décision du test.**

Sous H_0, l'intervalle $[59,95\,;\,60,05]$ contient 95 % des moyennes d'échantillons. Au seuil de risque de 5 %, si la moyenne observée appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0. Si elle est strictement inférieure à 59,95 ou strictement supérieure à 60,05, on rejette H_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $59,95 \leq \overline{L} \leq 60,05$; la rejeter sinon.

Question 2.c. **Appliquer le test à un échantillon de 100 vis dont la longueur moyenne mesurée est 60,03 mm, puis conclure quant au réglage de la première chaîne de production.**

La moyenne observée, 60,03 mm, appartient à l'intervalle de non-rejet $[59,95\,;\,60,05]$. D'après la règle établie, on ne rejette donc pas H_0 : $\mu = 60$ au seuil de 5 %. Cet échantillon ne met pas en évidence un écart significatif à 60 mm ; le réglage de la première chaîne est compatible avec la moyenne attendue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On ne rejette pas H_0 : le réglage est compatible avec une moyenne de 60 mm.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2024)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement C1, Session 2024, code 24MATGRC1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est 2 pour la plupart des spécialités et 3 pour Innovation textile et Pilotage des procédés. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur le séchage du bois d'épicéa et la production de vis, et évaluent équations différentielles, fonctions, probabilités, lois binomiale et normale, ainsi que test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière constante b/a et d'une solution de l'équation homogène.
- Pour f(t) = 0,7e^(-0,04t) + 0,1, la limite à long terme vaut 0,1 et la fonction est décroissante sur [0 ; +∞[.
- Pour n tirages indépendants de probabilité de défaut p, le nombre de défauts suit une loi binomiale B(n, p).
- Dans le test bilatéral du sujet, la zone de décision de H0 est l'intervalle [59,95 ; 60,05] mm pour la moyenne observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter la consigne de valeurs exactes dans la partie A, puis exploiter le graphique avec la précision qu'il permet dans la partie B.
- Dans l'arbre pondéré, compléter les probabilités des chaînes et celles du défaut et de son contraire.
- Pour la loi binomiale, préciser n et p, puis respecter l'arrondi au millième demandé.
- Pour le test, comparer la moyenne observée aux bornes de l'intervalle de décision et conclure dans le contexte du réglage.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la partie sur le séchage ?

On résout d'abord l'équation homogène, dont les solutions sont de la forme Ce^(-0,03864t). On ajoute la solution particulière constante 0,1, puis on utilise la teneur initiale de 80 % pour déterminer C.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un lot contienne au moins trois vis défectueuses ?

Avec X suivant B(50 ; 0,004), on peut calculer P(X ≥ 3) par le complément 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]. Le résultat doit être arrondi au millième.

Q : Quelle règle appliquer pour décider dans le test de réglage des vis ?

On ne rejette pas H0 si la moyenne observée est comprise entre 59,95 mm et 60,05 mm inclus. Si elle est en dehors de cet intervalle, on rejette H0 au seuil de risque de 5 %.

Q : Quels éléments de rédaction et de notation faut-il soigner ?

Le sujet précise que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Il faut expliciter les étapes, respecter les arrondis demandés et interpréter les résultats dans leur contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 6-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.