Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B, spécialité électrotechnique

Session 2024 • Code sujet : **24MATGRB3** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Résistance du béton au cours du séchage** (13 questions) **Page 3**

2. **Série de Fourier et valeur efficace d'un signal d'entrée** (8 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 4-Sujet.pdf

1. Résistance du béton au cours du séchage

Une dalle en béton gagne en résistance au fil des jours de séchage, selon une fonction modélisée par une équation différentielle. L'exercice étudie cette fonction, sa résistance moyenne et le nombre minimal de jours nécessaire pour atteindre un seuil de résistance.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,06y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie donne les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(t) = ke^{-at}$. Ici, le coefficient de y est $a = 0{,}06$. La constante k est réelle et arbitraire, puisqu'aucune condition initiale n'est donnée. Cette famille est définie et dérivable sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les solutions sont $y(t) = ke^{-0{,}06t}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Pour la fonction constante g définie par g(t) = 35 sur [0 ; +∞[, vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,06y = 2,1.

La fonction $g(t) = 35$ est constante, donc $g'(t) = 0$. On la substitue dans le membre de gauche de l'équation différentielle : $g'(t) + 0{,}06g(t) = 0 + 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$. Le résultat est égal au membre de droite de (E), pour tout $t \geq 0$. La fonction g est donc bien une solution particulière de cette équation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $g'(t) + 0{,}06g(t) = 2{,}1$: g est solution de (E).

Question 3. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,06y = 2,1.

On connaît une solution particulière de (E), à savoir $g(t) = 35$. Toute solution de l'équation différentielle complète s'obtient en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène associée. D'après la question 1, cette solution homogène est $ke^{-0{,}06t}$, où k est une constante réelle arbitraire. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-0{,}06t} + 35$, avec $k \in \mathbb{R}$, décrit toutes les solutions de (E).

Question 4. Sachant que la résistance du béton est nulle à l'instant t = 0, déduire que f(t) = -35e^(-0,06t) + 35 sur [0 ; +∞[.

La solution générale trouvée précédemment est $f(t) = ke^{-0,06t} + 35$. La résistance étant nulle à l'instant initial, on impose $f(0) = 0$. Comme $e^0 = 1$, cette condition donne $k + 35 = 0$, donc $k = -35$. En remplaçant k dans la solution générale, on obtient l'expression demandée pour la résistance du béton.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La condition initiale donne $k = -35$, donc $f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$.

Partie B - Étude de fonction

Question 1. Calculer la résistance du béton après 7 jours de séchage puis après 72 heures, et arrondir les résultats au dixième.

On utilise $f(t) = 35(1 - e^{-0,06t})$. Le temps doit être exprimé en jours : 72 heures correspondent à $72/24 = 3$ jours. On évalue donc la fonction en $t = 7$ et en $t = 3$, puis on arrondit chaque résistance au dixième de mégapascal.

Durée	Calcul	Résistance
7 jours	$35(1 - e^{-0,06\times 7})$	12,0 MPa
72 heures, soit 3 jours	$35(1 - e^{-0,06\times 3})$	5,8 MPa

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 7 jours : 12,0 MPa. Après 72 heures, soit 3 jours : 5,8 MPa.

Question 2. Vérifier que, pour tout réel t appartenant à [0 ; +∞[, f'(t) = 2,1e^(-0,06t).

On dérive $f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$. Par la dérivation d'une fonction composée, la dérivée de $e^{-0,06t}$ est $-0,06e^{-0,06t}$, et la dérivée de la constante 35 est nulle. Ainsi, $f'(t) = (-35)(-0,06)e^{-0,06t}$, ce qui donne exactement l'expression à vérifier.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 2,1e^{-0,06t}$.

Question 3. Déterminer le signe de f'(t) sur [0 ; +∞[, puis en déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout réel t, l'exponentielle $e^{-0{,}06t}$ est strictement positive. Comme $2{,}1 > 0$, leur produit $f'(t) = 2{,}1e^{-0{,}06t}$ est strictement positif sur $[0;+\infty[$. Une fonction dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle y est strictement croissante.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$	
Variation de f	$f(0) = 0$	croissante vers 35

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0;+\infty[$, $f'(t) > 0$ et la résistance f est strictement croissante.

Question 4. Déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers l'infini, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Quand t tend vers $+\infty$, $-0{,}06t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0{,}06t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = -35e^{-0{,}06t} + 35$, le terme exponentiel tend alors vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 35. Ainsi, la résistance du béton se rapproche de 35 MPa à mesure que le séchage se poursuit.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 35$ MPa : la résistance tend vers 35 MPa.

Question 5. Évaluer l'affirmation du fabricant selon laquelle la résistance du béton après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.

La résistance finale est la limite de f, soit 35 MPa. Après 28 jours, la proportion de cette valeur atteinte est $\frac{f(28)}{35} \times 100$. En remplaçant $f(28)$, on trouve $(1 - e^{-0{,}06\times 28}) \times 100 \approx 81{,}36\%$. Cette proportion est supérieure à 80 %, mais elle ne correspond pas exactement à l'affirmation du fabricant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : après 28 jours, la résistance atteint environ 81,36 % de la résistance finale.

Question 6. Montrer que la fonction F définie par F(t) = (1750/3)e^(-0,06t) + 35t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de $F(t) = \frac{1750}{3}e^{-0{,}06t} + 35t$. Le terme exponentiel a pour dérivée $\frac{1750}{3} \times (-0{,}06)e^{-0{,}06t} = -35e^{-0{,}06t}$. Le terme $35t$ a pour dérivée 35. Ainsi, $F'(t) = -35e^{-0{,}06t} + 35 = f(t)$ sur $[0;+\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est bien une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Question 7. Déterminer au dixième près la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours, en utilisant la formule fournie.

La valeur moyenne sur les 28 premiers jours est $M = \frac{1}{28}\int_0^{28} f(t)\,dt$. Avec la primitive F, cela devient $M = \frac{F(28)-F(0)}{28}$. En substituant les bornes, on obtient $M = \frac{980+\frac{1750}{3}(e^{-0{,}06\times 28}-1)}{28}$. Le résultat est arrondi au dixième de MPa.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur moyenne de la résistance sur les 28 premiers jours est $18{,}0$ MPa au dixième près.

Partie C - Algorithme

Question 1. Recopier l'algorithme et compléter les lignes 3 et 4 afin qu'il détermine le nombre minimal entier de jours de séchage nécessaire pour obtenir une résistance d'au moins 21 MPa.

Au départ, $R = 0$, donc la résistance est inférieure à 21 MPa. La boucle doit continuer tant que $R < 21$. À chaque passage, on ajoute un jour à t, puis la ligne 5 recalcule la résistance correspondant à cette durée. Elle s'arrête dès que R atteint ou dépasse 21 MPa, ce qui fournit le nombre minimal de jours.

1. Ligne 3 : Tant que $R < 21$
2. Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 3 : Tant que $R < 21$. Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$.

Question 2. Donner la valeur de N, nombre minimal entier de jours permettant d'obtenir une résistance d'au moins 21 MPa, et expliquer la démarche suivie.

La fonction f est strictement croissante, donc il suffit de vérifier les jours entiers autour du seuil. À 15 jours, $f(15) = 35(1 - e^{-0{,}06\times 15}) \approx 20{,}77$ MPa, ce qui est inférieur à 21 MPa. À 16 jours, $f(16) = 35(1 - e^{-0{,}06\times 16}) \approx 21{,}60$ MPa. Le seuil est donc atteint pour la première fois au seizième jour.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le nombre minimal de jours nécessaire pour atteindre au moins 21 MPa est $N = 16$.

2. Série de Fourier et valeur efficace d'un signal d'entrée

L'exercice étudie la tension d'entrée d'un filtre, un signal périodique de période 20 égal à 12 sur la première moitié de chaque période et à 0 sur la seconde. Les questions portent sur sa représentation, ses valeurs moyenne et efficace, ses coefficients de Fourier et l'approximation de sa valeur efficace par une somme partielle.

Question 1. La fonction E étant périodique de période T = 20, vérifier que sa pulsation vaut ω = π/10.

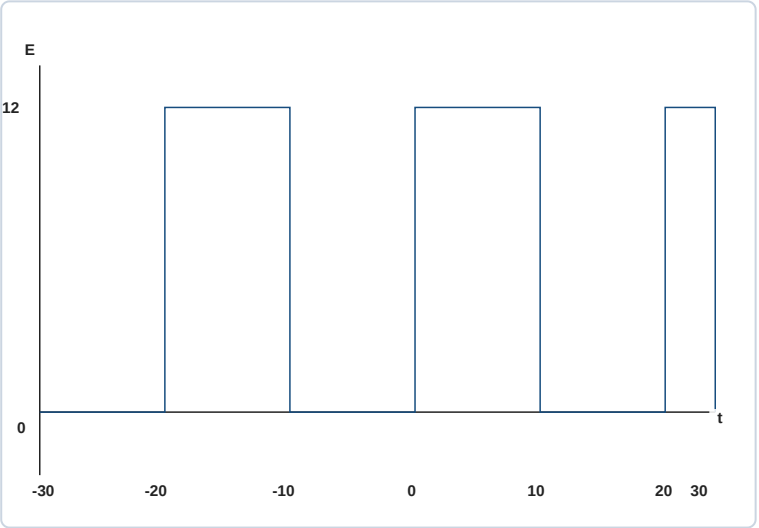
La pulsation vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Pour $T = 20$, $\omega = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = \frac{\pi}{10}$ rad par unité de temps.

Question 2. Représenter la courbe de E pour t appartenant à [-30 ; 30], avec une échelle des abscisses de 2 cm pour l'intervalle de 0 à 10 et une échelle des ordonnées de 1 cm pour l'intervalle de E = 0 à E = 2.

Sur chaque période, le signal vaut 12 sur la première moitié et 0 sur la seconde. Sur $[-30; 30]$, les créneaux hauts sont $[-20; -10[$, $[0; 10[$ et $[20; 30[$. Le signal retombe à 0 en $t = 30$.

Signal d'entrée E sur [-30 ; 30]



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Créneaux de hauteur 12, de période 20, sur $[-30; 30]$.

Question 3. Déterminer la valeur moyenne a_0 de la fonction E.

Sur une période de 20 unités, E vaut 12 pendant 10 unités et 0 pendant 10 unités. Ainsi, $a_0 = \frac{1}{20}(12 \times 10 + 0 \times 10) = 6$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = 6$.

Question 4. À l'aide de la formule fournie pour la valeur efficace, montrer que Eeff = 6√2.

Sur une période, $E(t)^2 = 144$ pendant 10 unités, puis 0 pendant 10 unités. Donc $(E_{\text{eff}})^2 = \frac{144 \times 10}{20} = 72$, d'où, puisque la valeur efficace est positive, $E_{\text{eff}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier naturel n ≥ 1, le coefficient de Fourier aₙ est nul.

La formule donne $a_n = \frac{2}{20}\int_0^{20} E(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Comme $E(t) = 12$ sur $[0;10[$ et $\omega = \frac{\pi}{10}$, on obtient $a_n = \frac{12}{10}\int_0^{10}\cos(\frac{n\pi t}{10})\,dt = \frac{12}{n\pi}\sin(n\pi) = 0$, pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = 0$.

Question 6. En utilisant la formule bₙ = 12/(nπ)(1 - cos(nπ)), montrer que bₙ = 0 lorsque n est pair.

Si n est pair, alors $n = 2m$ pour un entier m, et $\cos(n\pi) = \cos(2m\pi) = 1$. La formule donne donc $b_n = \frac{12}{n\pi}(1 - 1) = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout n pair, $b_n = 0$.

Question 7. Recopier et compléter le tableau des coefficients bₙ pour n allant de 1 à 7, avec des valeurs arrondies à 0,01.

Pour n impair, $\cos(n\pi) = -1$, donc $b_n = \frac{24}{n\pi}$. Pour n pair, $b_n = 0$. Les coefficients arrondis au centième sont :

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n	7,64	0	2,55	0	1,53	0	1,09

Tableau des coefficients complété

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n	7,64	0	2,55	0	1,53	0	1,09

✓ RÉPONSE À RETENIR

$(b_1, \ldots, b_7) = (7{,}64; 0; 2{,}55; 0; 1{,}53; 0; 1{,}09)$.

Question 8. À partir de la définition de E_7, commenter l'affirmation selon laquelle E_7 représente une approximation de Eeff avec moins de 5 % d'erreur.

Comme $a_0 = 6$, tous les $a_k = 0$, et les b_k pairs sont nuls, $(E_7)^2 = 36 + \frac{1}{2}\left[(\frac{24}{\pi})^2 + (\frac{24}{3\pi})^2 + (\frac{24}{5\pi})^2 + (\frac{24}{7\pi})^2\right]$. Ainsi, $E_7 \approx 8{,}38$. L'erreur relative par rapport à $E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2}$ vaut environ $1{,}27\%$, donc elle est inférieure à 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E_7 \approx 8{,}38$, avec environ $1{,}27\%$ d'erreur : l'affirmation est vraie.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2024)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2024, code 24MATGRB3, d'une durée de 2 heures et de coefficient 2 pour la spécialité électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la résistance du béton pendant son séchage et un signal périodique d'entrée de filtre. Les compétences évaluées comprennent équations différentielles, analyse de fonctions, intégration, algorithmes et séries de Fourier.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière permet de construire celles d'une équation avec second membre.
- La valeur moyenne de h sur [a ; b] est M = 1/(b-a) $\int_a^b$ h(t)dt.
- Pour un signal périodique de période T, ω = 2π/T et $(feff)^2$ = 1/T $\int_0^T (f(t))^2 dt$.
- Les coefficients de Fourier sont a_0 = 1/T $\int_0^T$ f(t)dt, puis a_n et b_n = 2/T fois les intégrales avec cos(nωt) et sin(nωt).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le domaine t ≥ 0 et convertir les heures en jours avant d'évaluer la fonction de résistance.
- Pour interpréter une limite ou une variation, préciser les unités et relier le résultat à la résistance du béton.
- Ne pas confondre la valeur moyenne du signal avec sa valeur efficace, qui utilise l'intégrale du carré du signal.
- Calculer les coefficients b_n demandés avec la formule fournie et arrondir les valeurs du tableau à 0,01.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du béton ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, dont les solutions sont ke^(-0,06t). Ajoutez une solution particulière constante pour le second membre, puis utilisez la condition initiale f(0) = 0 afin de déterminer la constante.

Q : Quelle différence y a-t-il entre valeur moyenne et valeur efficace ?

La valeur moyenne est l'intégrale du signal sur une période divisée par la période. La valeur efficace est la racine carrée de la moyenne du carré du signal, ce qui tient compte de son effet électrique.

Q : Comment répartir son temps dans cette épreuve ?

La durée est de 2 heures et les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre les deux exercices, puis gardez quelques minutes pour vérifier les unités, les arrondis et les réponses laissées incomplètes.

Q : Quels critères de présentation faut-il privilégier dans les réponses ?

Le sujet ne fournit pas de grille détaillée par question. Présentez les étapes utiles, justifiez les résultats demandés, respectez les unités et les arrondis prescrits, puis formulez clairement les conclusions dans leur contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 4-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.