Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2024 • Code sujet : **24MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Résistance du béton au cours du séchage** (13 questions) **Page 3**

2. **Étude d'un circuit LC par transformée de Laplace** (8 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 2-Sujet.pdf

1. Résistance du béton au cours du séchage

On modélise la résistance, en MPa, du béton d'une dalle en fonction du nombre de jours de séchage. L'exercice étudie une équation différentielle, la fonction obtenue, sa valeur moyenne et un algorithme recherchant le délai nécessaire pour atteindre 21 MPa.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,06y = 0 en utilisant la formule fournie.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, avec k réel. Ici, $a = 0,06$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,06t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Vérifier que la fonction constante g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 35 est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,06y = 2,1.

La fonction constante $g(t) = 35$ vérifie $g'(t) = 0$. En remplaçant dans le membre de gauche de (E), on obtient $0 + 0,06 \times 35 = 2,1$, qui est bien le second membre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 35$ est solution de (E).

Question 3. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,06y = 2,1.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant une solution particulière, $g(t) = 35$, aux solutions de l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,06t} + 35$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4. Sachant qu'à l'instant t = 0 la résistance du béton est nulle, déduire que f(t) = -35e^(-0,06t) + 35 sur [0 ; +∞[.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = k + 35 = 0$, donc $k = -35$. En remplaçant k par cette valeur, on obtient l'expression de la résistance.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$.

Partie B - Étude de fonction

Question 1. Calculer la résistance du béton après 7 jours de séchage puis après 72 heures, et arrondir chaque résultat au dixième.

On évalue $f(t) = 35(1 - e^{-0,06t})$. Pour 72 heures, soit $72/24 = 3$ jours, on calcule donc $f(3)$. Les deux résultats sont arrondis au dixième de MPa.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 7 jours : 12,0 MPa. Après 72 heures, soit 3 jours : 5,8 MPa.

Question 2. En admettant que f est dérivable sur [0 ; +∞[, vérifier que, pour tout t de cet intervalle, f'(t) = 2,1e^(-0,06t).

En dérivant $f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$, la dérivée de l'exponentielle apporte le facteur $-0,06$. Ainsi, $f'(t) = -35 \times (-0,06)e^{-0,06t}$, et la dérivée de la constante est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 2,1e^{-0,06t}$.

Question 3. Déterminer le signe de f'(t) sur [0 ; +∞[, puis en déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.

L'exponentielle est strictement positive pour tout réel, et son coefficient 2,1 est positif. Le signe de la dérivée et les variations de f sont donc :

Intervalle	$[0; +\infty[$
$f'(t)$	$+$
Variations de f	Strictement croissante

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$; f y est strictement croissante.

Question 4. Déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers l'infini et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Lorsque t tend vers $+\infty$, $e^{-0,06t}$ tend vers 0. Par conséquent, le terme $-35e^{-0,06t}$ tend vers 0 et la résistance tend vers 35 MPa. Dans le modèle, cette valeur représente la résistance finale du béton.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 35$ MPa, résistance finale modélisée.

Question 5. Vérifier si l'affirmation du fabricant est juste : après 28 jours de séchage, la résistance du béton correspond à 80 % de la résistance finale.

La résistance finale est 35 MPa : 80 % correspondent donc à $0,8 \times 35 = 28$ MPa. Or, après 28 jours, $f(28) = 35(1 - e^{-0,06\times 28}) \approx 28,48$ MPa, soit environ 81,4 % de la valeur finale. L'affirmation n'est donc pas exacte.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : après 28 jours, la résistance atteint environ 28,48 MPa, soit 81,4 % de la résistance finale.

Question 6. Montrer que F(t) = (1750/3)e^(-0,06t) + 35t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive F : $F'(t) = \frac{1750}{3}(-0,06)e^{-0,06t} + 35$. Comme $\frac{1750}{3}(-0,06) = -35$, on retrouve $F'(t) = -35e^{-0,06t} + 35 = f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 7. Déterminer au dixième près la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours en utilisant la formule fournie.

La valeur moyenne sur $[0; 28]$ vaut $M = \frac{F(28)-F(0)}{28}$. Avec la primitive donnée, cela donne $M = \frac{35\times 28 - \frac{1750}{3}(1-e^{-0,06\times 28})}{28}$. On arrondit le résultat au dixième de MPa.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Valeur moyenne sur les 28 premiers jours : 18,0 MPa.

Partie C - Algorithme

Question 1. Compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme recherchant le nombre entier minimal de jours de séchage nécessaire pour obtenir une résistance d'au moins 21 MPa.

La boucle s'arrête dès que la résistance atteint 21 MPa. Elle doit donc continuer tant que $R < 21$, en augmentant t d'un jour à chaque passage ; la ligne 5 recalcule ensuite la résistance correspondante.

```
Ligne 3 : Tant que R < 21
Ligne 4 :     t ← t + 1
```

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 3 : Tant que $R < 21$. Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$.

Question 2. Donner la valeur de N, nombre entier minimal de jours de séchage nécessaire pour obtenir une résistance d'au moins 21 MPa, et expliquer la démarche suivie.

Au jour 15, $f(15) \approx 20,77$ MPa, encore sous le seuil. Au jour 16, $f(16) \approx 21,60$ MPa. Comme la fonction est croissante, 16 est le premier nombre entier de jours qui permet d'atteindre au moins 21 MPa.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N = 16$ jours.

2. Étude d’un circuit LC par transformée de Laplace

Un circuit LC est modélisé par une équation différentielle reliant le signal d’entrée e(t) au signal de sortie s(t), avec des conditions initiales nulles. L’exercice mobilise les transformées de Laplace et la fonction de transfert pour déterminer la réponse à une entrée échelon et identifier sa représentation graphique.

Question 1. Pour L = 10 H et C = 10^-5 F, réécrire l’équation différentielle LCs''(t) + s(t) = e(t).

Le coefficient de la dérivée seconde vaut le produit des deux paramètres : $LC = 10 \times 10^{-5} = 10^{-4}$. On remplace donc LC par 10^{-4} dans l’équation du circuit. Les fonctions s et e ainsi que les autres termes restent inchangés. On obtient l’équation différentielle réécrite avec les valeurs données de L et C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$10^{-4}s''(t) + s(t) = e(t)$

Question 2. À partir de l’équation différentielle et des conditions initiales s(0+) = 0 et s'(0+) = 0, démontrer que (10^-4p² + 1)S(p) = E(p).

La transformée de Laplace de $s''(t)$ est $p^2S(p) - ps(0^+) - s'(0^+)$. Les conditions initiales étant nulles, cette expression devient $p^2S(p)$. En transformant l’équation de la question 1, on obtient $10^{-4}p^2S(p) + S(p) = E(p)$. On factorise ensuite $S(p)$ au membre de gauche, ce qui donne la relation demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$(10^{-4}p^2 + 1)S(p) = E(p)$

Question 3. Sachant que S(p) = H(p) × E(p), démontrer que la fonction de transfert est H(p) = 10^4/(p² + 10^4).

De la relation précédente, on tire $S(p) = \dfrac{E(p)}{10^{-4}p^2 + 1}$. Comme $S(p) = H(p)E(p)$, la fonction de transfert est $H(p) = \dfrac{1}{10^{-4}p^2 + 1}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par 10^4, on obtient la forme demandée. Cette expression est le rapport entre la transformée de sortie et celle d’entrée.

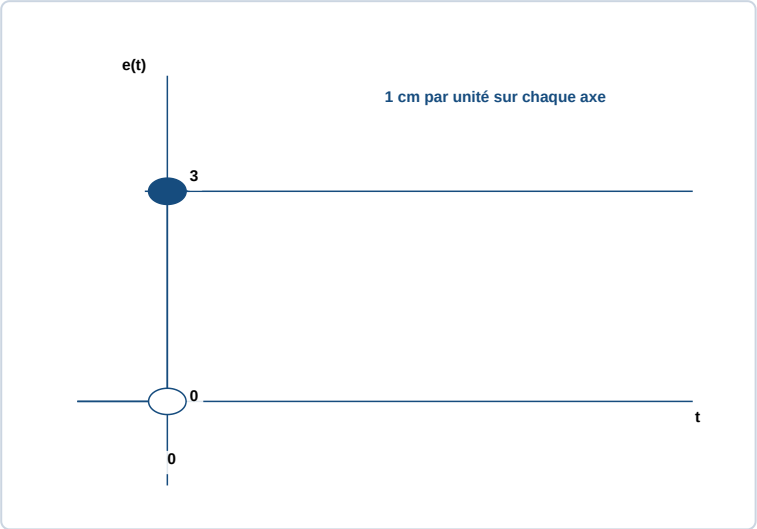
✓ RÉPONSE À RETENIR

$H(p) = \dfrac{10^4}{p^2 + 10^4}$

Question 4. Pour e(t) = 3U(t), où U est la fonction échelon unité définie dans le sujet, représenter graphiquement le signal d'entrée en prenant 1 cm pour chaque axe.

Par définition, $U(t) = 0$ pour $t < 0$ et $U(t) = 1$ pour $t \geq 0$. Ainsi, $e(t) = 3U(t)$ vaut zéro avant l'origine, puis trois à partir de l'origine. Le point $(0, 0)$ est ouvert, tandis que $(0, 3)$ est plein. Le schéma indique les axes t et $e(t)$, avec l'échelle demandée de 1 cm par unité sur chaque axe.

Signal d'entrée e(t), échelle 1 cm par unité sur chaque axe



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, et $e(t) = 3$ si $t \geq 0$.

Question 5. Donner l'expression de la transformée de Laplace E(p) du signal e(t) = 3U(t).

Le signal d'entrée est $e(t) = 3U(t)$. Le formulaire donne la transformée de Laplace de l'échelon unité : $\mathcal{L}\{U(t)\} = \frac{1}{p}$. Par linéarité de la transformée, multiplier le signal par 3 multiplie aussi sa transformée par 3. Il suffit donc de multiplier $\frac{1}{p}$ par 3 pour obtenir l'expression de $E(p)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{3}{p}$$

Question 6. À l'aide des questions précédentes, déterminer S(p), puis démontrer que S(p) = 3/p - 3p/(p² + 10^4).

On utilise $S(p) = H(p)E(p)$, avec $H(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4}$ et $E(p) = \frac{3}{p}$. Ainsi, $S(p) = \frac{3 \times 10^4}{p(p^2 + 10^4)}$. Pour vérifier la décomposition demandée, on réduit $\frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4}$ au même dénominateur : son numérateur est $3(p^2 + 10^4) - 3p^2 = 3 \times 10^4$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4}$$

Question 7. Déduire de l'expression de S(p) l'expression temporelle s(t).

D'après le formulaire, $\frac{1}{p}$ est la transformée de $U(t)$, et $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ celle de $\cos(\omega t)U(t)$. Ici, $\omega^2 = 10^4$, donc $\omega = 100$. Les deux termes de $S(p)$ correspondent ainsi à $3U(t)$ et $3\cos(100t)U(t)$. Leur différence donne le signal de sortie.

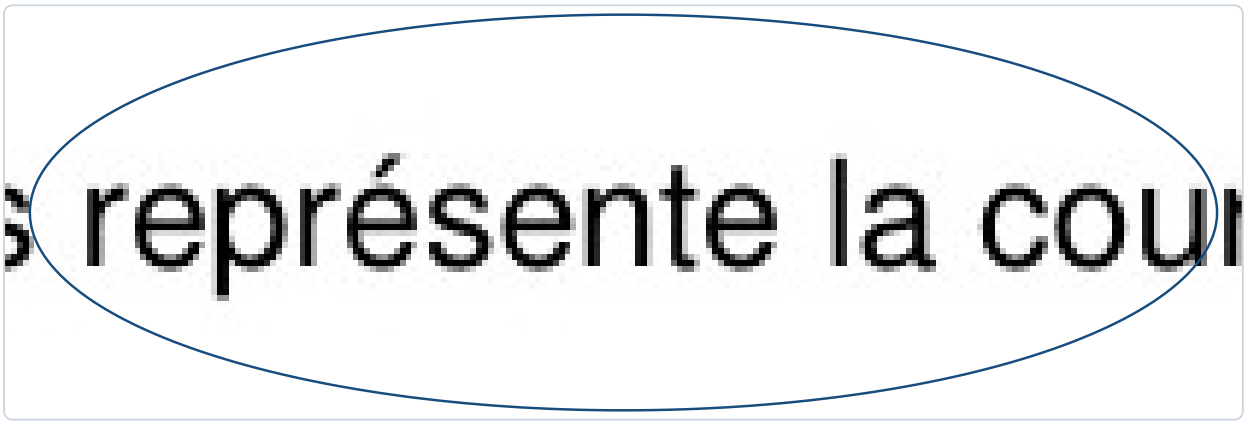
✓ RÉPONSE À RETENIR

$$s(t) = 3U(t)\big(1 - \cos(100t)\big)$$

Question 8. En admettant que s(t) = 3U(t)(1 - cos(100t)), indiquer sans justifier lequel des quatre croquis proposés représente la courbe de s(t).

Pour $t < 0$, le facteur $U(t)$ impose $s(t) = 0$. Pour $t \geq 0$, le cosinus varie entre -1 et 1, donc $3(1 - \cos(100t))$ varie entre 0 et 6. Le signal démarre à zéro, reste positif ou nul et revient périodiquement à zéro. Parmi les croquis proposés, seul le croquis n°2 présente ces caractéristiques.

Croquis n°2 sélectionné



✓ RÉPONSE À RETENIR

Croquis n°2.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS GESTION DE LA PME

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2024)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2024, code 24MATGRB2, durée 2 heures et coefficient 1,5 pour la spécialité Conception et industrialisation en microtechniques. Les deux exercices portent sur la résistance du béton pendant son séchage et la réponse d'un circuit LC à un échelon. Les compétences évaluées concernent les équations différentielles, l'analyse de fonctions, les algorithmes et les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Si f'(t) est positive sur un intervalle, alors f y est croissante.
- La valeur moyenne de h sur [a ; b] vaut 1/(b-a) multiplié par l'intégrale de h entre a et b.
- La transformée de Laplace de f''(t) est $p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour le béton, exprimer le temps en jours et la résistance en MPa, en convertissant 72 heures en jours.
- Justifier le signe de la dérivée et relier la limite obtenue à la résistance finale du béton.
- Pour la valeur moyenne, intégrer entre 0 et 28 puis diviser par 28 avant d'arrondir au dixième.
- Pour le circuit LC, appliquer les conditions initiales dans la transformée de la dérivée seconde et respecter la définition de U(t).

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la valeur moyenne de la résistance sur les 28 premiers jours ?

On calcule l'intégrale de f entre 0 et 28, puis on divise par 28. La primitive fournie permet d'évaluer cette intégrale aux deux bornes, puis on arrondit la valeur moyenne au dixième.

Q : Comment les conditions initiales interviennent-elles dans la transformée de Laplace d'une dérivée seconde ?

La transformée de s''(t) est $p^2S(p) - ps(0+) - s'(0+)$. Comme les deux conditions initiales données sont nulles, elle se réduit ici à $p^2S(p)$.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points chacun. Répartissez le temps entre eux et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et la représentation graphique du signal.

Q : Quels éléments permettent de choisir le bon croquis de la réponse du circuit ?

La réponse vaut zéro à l'origine et reste non négative, car 1 - cos(100t) est toujours positif ou nul. Elle oscille périodiquement entre 0 et 6 après l'échelon.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.