Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2024 • Code sujet : **24MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Résistance du béton au cours du séchage (13 questions) **Page 3**

2. Lois de probabilité et test d'hypothèse (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 1-Sujet.pdf

1. Résistance du béton au cours du séchage

Une dalle en béton sèche et gagne en résistance au fil des jours, la résistance étant modélisée par une fonction du temps exprimée en MPa. L'exercice étudie ce modèle par équation différentielle, analyse de fonction et algorithme.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,06y = 0.

L'équation homogène est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0{,}06$. D'après la formule fournie, ses solutions sont les fonctions exponentielles de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. La formule vaut sur tout l'intervalle demandé, $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}06t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 35 est solution de l'équation différentielle y' + 0,06y = 2,1.

La fonction constante $g(t) = 35$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0{,}06g(t) = 0 + 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$. Cette égalité étant vraie pour tout $t \geq 0$, la fonction proposée vérifie bien l'équation différentielle (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 35$ est une solution de (E).

Question 3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,06y = 2,1.

La fonction $g(t) = 35$ est une solution particulière de l'équation complète. Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à cette solution particulière les solutions de l'équation homogène, trouvées à la question précédente. On obtient ainsi une famille de fonctions, où la constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}06t} + 35$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4. Sachant qu'à l'instant t = 0 la résistance du béton est nulle, en déduire que f(t) = −35e^(−0,06t) + 35 sur [0 ; +∞[.

La solution générale s'écrit $f(t) = ke^{-0{,}06t} + 35$. La résistance initiale est nulle, donc $f(0) = 0$. Comme $e^0 = 1$, cette condition donne $k + 35 = 0$, soit $k = -35$. En remplaçant k dans l'expression générale, on obtient la fonction de résistance demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$, pour $t \geq 0$.

Partie B - Étude de fonction

Question 1. Calculer la résistance du béton après 7 jours de séchage puis après 72 heures, et arrondir chaque résultat au dixième.

La fonction donne la résistance en fonction du nombre de jours de séchage. Pour sept jours, on calcule $f(7) = 35 - 35e^{-0,06\times 7}$. Les 72 heures doivent d'abord être converties en jours : $72/24 = 3$, puis on calcule $f(3) = 35 - 35e^{-0,06\times 3}$. On arrondit chaque résultat au dixième de MPa.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 7 jours : $12,0$ MPa. Après 72 heures : $5,8$ MPa.

Question 2. Vérifier que, pour tout réel t appartenant à [0 ; +∞[, f'(t) = 2,1e^(−0,06t).

On dérive $f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$. Pour le terme exponentiel, on applique la règle $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$, avec $u(t) = -0,06t$ et $u'(t) = -0,06$. Le terme constant a pour dérivée zéro. Ainsi, la dérivée s'écrit bien sous la forme demandée, pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = 2,1e^{-0,06t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 3. Déterminer le signe de f'(t) sur [0 ; +∞[, puis en déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout réel t, l'exponentielle $e^{-0,06t}$ est strictement positive. Comme son coefficient $2,1$ est lui aussi positif, le produit $f'(t) = 2,1e^{-0,06t}$ est strictement positif sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$. Une fonction dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle y est strictement croissante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$; f est strictement croissante.

Question 4. Déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers l'infini, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0{,}06t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0{,}06t}$ tend vers zéro. Dans l'expression $f(t) = -35e^{-0{,}06t} + 35$, le terme exponentiel disparaît à la limite. La résistance modélisée se rapproche donc d'une valeur limite de 35 MPa, sans la dépasser.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 35$ MPa : la résistance se rapproche de 35 MPa.

Question 5. Vérifier si l'affirmation du fabricant selon laquelle la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale est juste.

La résistance finale est la limite 35 MPa. Une résistance égale à 80 % de cette valeur serait donc $0{,}80 \times 35 = 28$ MPa. Or, après 28 jours, le modèle donne $f(28) = 35 - 35e^{-0{,}06 \times 28} \approx 28{,}48$ MPa, soit environ 81,4 % de la valeur finale. Le résultat ne correspond pas à 80 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'affirmation est fausse : après 28 jours, le modèle donne environ $28{,}5$ MPa, soit $81{,}4\%$ de la résistance finale.

Question 6. Montrer que F(t) = (1750/3)e^(−0,06t) + 35t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = \frac{1750}{3}e^{-0{,}06t} + 35t$. La dérivée de l'exponentielle est $-0{,}06e^{-0{,}06t}$, et celle de $35t$ est 35. Ainsi, $F'(t) = \frac{1750}{3}(-0{,}06)e^{-0{,}06t} + 35$. Comme $\frac{1750}{3}(-0{,}06) = -35$, on retrouve $f(t)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 7. Déterminer au dixième près la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours, en utilisant la formule fournie.

Sur les 28 premiers jours, la valeur moyenne est $M = \frac{1}{28}\int_0^{28} f(t)\,dt$. Avec la primitive donnée, $M = \frac{F(28) - F(0)}{28}$. En remplaçant par les expressions de $F(28)$ et $F(0)$, on obtient $M = \frac{35 \times 28 - \frac{1750}{3}(1 - e^{-0{,}06 \times 28})}{28}$. L'évaluation puis l'arrondi au dixième donnent la moyenne demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Valeur moyenne : $18{,}0$ MPa.

Partie C - Algorithme

Question 1. Recopier l'algorithme et compléter les lignes 3 et 4 afin qu'il détermine le nombre minimal de jours de séchage nécessaire pour atteindre une résistance d'au moins 21 MPa.

Au départ, $t = 0$ et $R = 0$, donc la résistance est inférieure au seuil. La boucle doit continuer tant que $R < 21$. À chaque passage, on augmente le nombre de jours d'une unité, puis on recalcule la résistance à ce nouveau jour. Elle s'arrête lorsque $R \geq 21$, ce qui correspond au nombre minimal de jours recherché.

Algorithme complété

algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que .. R < 21 .....
Ligne 4	$t \leftarrow$ .....
Ligne 5	R t ← t + 1 $35e^{-0,06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 3 : Tant que $R < 21$. Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$.

Question 2. Donner la valeur de N, nombre minimal de jours requis pour atteindre une résistance d'au moins 21 MPa, et expliquer la démarche suivie.

La résistance est strictement croissante, donc il suffit de vérifier les deux jours entiers autour du seuil. Au jour 15, $f(15) = 35 - 35e^{-0,06\times15} \approx 20,77$ MPa, encore sous 21 MPa. Au jour 16, $f(16) = 35 - 35e^{-0,06\times16} \approx 21,60$ MPa, le seuil est dépassé. Le premier jour où la condition est satisfaite est donc 16.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N = 16$ jours.

2. Lois de probabilité et test d'hypothèse

L'exercice étudie trois situations : le diamètre de tiges métalliques, les pannes d'imprimantes et la résistance de blocs de béton de chanvre. Il mobilise la loi normale, la loi binomiale et un test bilatéral portant sur une résistance moyenne.

Partie A - Loi normale

Question 1. **Pour le diamètre X suivant une loi normale de moyenne 32 mm et d'écart-type 0,6 mm, donner au millième près la probabilité que le diamètre soit compris entre 31 et 33 mm.**

On standardise la variable : **U = (X − 32)/0,6**. Les bornes 31 et 33 deviennent respectivement −1,667 et 1,667. Par symétrie de la loi normale centrée réduite, la probabilité cherchée vaut **2Φ(1,667) − 1 ≈ 0,9044**, soit 0,904 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(31 ≤ X ≤ 33) ≈ 0,904.

Question 2. **Déterminer au millième près le réel h tel que P(X > 32 − h) = 0,975.**

La condition équivaut à **P(U > −h/0,6) = 0,975**, où U suit la loi normale centrée réduite. Le quantile correspondant est −1,960, car P(U > −1,960) ≈ 0,975. Ainsi, −h/0,6 = −1,960, donc **h ≈ 0,6 × 1,960 = 1,176 mm**.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 1,176 mm.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **Préciser la loi suivie par Y, le nombre d'imprimantes en panne parmi 15 imprimantes indépendantes, donner ses paramètres et son espérance.**

Les 15 imprimantes fonctionnent indépendamment et chacune tombe en panne avec la probabilité 0,07. Le nombre Y de pannes suit donc une loi binomiale de paramètres n = 15 et p = 0,07. Son espérance est le produit du nombre d'imprimantes par la probabilité de panne : **E(Y) = 15 × 0,07 = 1,05**.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Y suit B(15 ; 0,07) et E(Y) = 1,05.

Question 2. **Calculer au millième près la probabilité qu'exactement 12 imprimantes ne tombent pas en panne ce jour-là.**

Si exactement 12 imprimantes ne tombent pas en panne, les 3 autres sont en panne. Avec Y suivant B(15 ; 0,07), on obtient **$P(Y = 3) = C(15,3) \times 0{,}07^3 \times 0{,}93^{12}$**. Le coefficient C(15,3) compte les choix des trois imprimantes en panne. Le calcul donne environ 0,065328, soit 0,065 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est 0,065.

Question 3. **Calculer au millième près la probabilité qu'au moins 3 imprimantes tombent en panne ce jour-là.**

On calcule l'événement contraire, correspondant à zéro, une ou deux pannes : **$P(Y \geq 3) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)]$**. Pour Y suivant B(15 ; 0,07), cela donne environ 0,0829. Après arrondi au millième, la probabilité demandée vaut 0,083.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \geq 3) \approx 0{,}083$.

Partie C - Test d'hypothèse

Question 1. **Sous l'hypothèse nulle H0 : μ = 50, justifier que la moyenne des résistances d'un échantillon de 80 blocs suit une loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 0,04.**

Sous H_0, la moyenne de la population est μ = 50 MPa. La moyenne d'un échantillon de taille 80 suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ/√n. Ici, **$0{,}35/\sqrt{80} \approx 0{,}0391$**, arrondi au centième à 0,04. La moyenne d'échantillon suit donc la loi normale annoncée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sous H_0, $\bar{Z}$ suit une loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 0,04.

Question 2. **Choisir, parmi 0,05, 0,04, 0,08 et 0,12, la valeur de h telle que, sous H0, $P(50 - h \leq \bar{Z} \leq 50 + h) = 0{,}95$. Aucune justification n'est demandée.**

Pour une loi normale, l'intervalle central de probabilité 0,95 s'étend à environ 1,96 écart-type de part et d'autre de la moyenne. Avec l'écart-type exact 0,35/√80, on obtient **$h \approx 1{,}96 \times 0{,}35/\sqrt{80} \approx 0{,}077$**. La proposition la plus proche est 0,08.

✓ RÉPONSE À RETENIR

h = 0,08.

Question 3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser le test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil bilatéral de 5 %, on retient l'intervalle central correspondant à la valeur proposée h = 0,08 MPa. On compare la moyenne observée à l'intervalle **[50 − 0,08 ; 50 + 0,08] = [49,92 ; 50,08]** : si elle y appartient, on ne rejette pas H_0 ; sinon, on rejette H_0 au profit de H_1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $49{,}92 \leq \bar{Z} \leq 50{,}08$; sinon, rejeter H_0.

Question 4. À partir des résistances mesurées et de leurs effectifs dans l'échantillon de 80 blocs, appliquer le test d'hypothèse et conclure.

Résistance (MPa)	**49,7**	**49,8**	**49,9**	**50**	**50,2**	**50,4**	**50,5**
Effectif	2	5	15	24	17	13	4

La moyenne observée vaut **4007,5/80 = 50,09375 MPa**. Elle est supérieure à la borne 50,08 MPa de l'intervalle d'acceptation. On rejette donc H_0 au seuil de 5 % : l'échantillon est incompatible avec l'affirmation μ = 50 MPa.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\bar{Z}$ = 50,09375 MPa, hors de [49,92 ; 50,08] : rejet de H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2024)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2024, code 24MATGRB1, d'une durée de 2 heures et de coefficient 2 ou 3 selon la spécialité. L'exercice 1 modélise le séchage du béton par équation différentielle, étude de fonction et algorithme. L'exercice 2 évalue les lois normale et binomiale ainsi qu'un test bilatéral sur la résistance moyenne de blocs de béton de chanvre.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(−at) ; une solution particulière permet de déterminer les solutions de l'équation complète.
- Si f'(t) est positive sur un intervalle, f y est croissante ; sa limite décrit ici la résistance finale du béton modélisé.
- Pour n essais indépendants de probabilité de panne p, le nombre de pannes suit B(n,p) et son espérance vaut np.
- La moyenne d'un échantillon de taille n a pour écart-type σ/√n ; un test bilatéral compare la moyenne observée aux bornes critiques.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et convertir 72 heures en jours avant d'évaluer la résistance.
- Pour la loi binomiale, Y compte les pannes : utiliser p = 0,07 et non la probabilité de non-panne.
- Dans le test, calculer la moyenne pondérée par les effectifs et la comparer à l'intervalle critique au seuil de 5 %.
- Respecter les arrondis demandés : au dixième pour les résistances et la valeur moyenne, au millième pour les probabilités.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la valeur moyenne de la résistance sur les 28 premiers jours ?

On applique $M = (1/28)\int_0^{28} f(t)dt$. Avec la primitive F donnée dans le sujet, on calcule [F(28) − F(0)]/28, puis on arrondit le résultat au dixième.

Q : Comment déterminer h pour la probabilité centrale de 0,95 dans le test ?

La probabilité centrale de 0,95 laisse 0,025 dans chaque queue de la loi normale. On utilise le quantile correspondant à 0,975 et l'écart-type 0,04 de la moyenne d'échantillon pour déterminer h.

Q : Combien de points vaut chaque exercice et combien de temps dure l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points, soit 20 points au total, et l'épreuve dure 2 heures. Le sujet ne précise pas de répartition des points entre les différentes questions.

Q : Quelle règle appliquer pour conclure le test bilatéral au seuil de 5 % ?

On rejette H0 si la moyenne observée est en dehors de l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H0. Sinon, on ne rejette pas H0. Cette conclusion ne prouve pas que la moyenne est exactement égale à 50 MPa.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2024/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.