Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité du blé, poids des sacs et clientèle de la minoterie (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2023/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l’eau d’un spa

Après la coupure du chauffage, la température de l’eau d’un spa, initialement à 38 °C, est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle, tandis que la température extérieure reste à 25 °C. L’exercice étudie le modèle, son évolution, une alarme de température et un algorithme simulant le refroidissement.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

On résout $y' = -0,05y$, équation différentielle de la forme $y' = ay$. Ses solutions sont $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

1. Pour une solution constante $y(t) = k$, on a $y'(t) = 0$.
2. L’équation impose alors $0,05k = 1,25$, donc $k = 1,25/0,05 = 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. Déduire des questions précédentes les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l’équation avec second membre s’obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l’équation homogène. On ajoute donc la solution constante 25 à $Ce^{-0,05t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, la fonction modélisant la température est f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. La condition initiale donne $f(0) = C + 25 = 38$, donc $C = 38 - 25 = 13$. On obtient ainsi l’expression demandée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, pour tout $t \geq 0$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

En remplaçant t par 24, on obtient $f(24) = 13e^{-0,05\times 24} + 25 \approx 28,9155$. Arrondie au dixième, cette valeur représente la température de l'eau 24 heures après la coupure du chauffage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 heures, l'eau est à environ $28,9$ °C.

Question 2. a). Déterminer, pour tout réel t de [0 ; +∞[, une expression de f'(t).

On dérive le terme exponentiel en multipliant par la dérivée de son exposant. La dérivée de la constante 25 est nulle :

$f'(t) = 13 \times (-0,05)e^{-0,05t} = -0,65e^{-0,05t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis dire s'il paraît cohérent avec le contexte et argumenter.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ est positive. Ainsi, $f'(t) = -0,65e^{-0,05t} < 0$.

- La fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
- C'est cohérent avec la situation : une fois le chauffage coupé, l'eau refroidit.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, ce qui correspond au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Par conséquent, dans $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le terme exponentiel tend vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

La température de l'eau se rapproche de 25 °C après une longue durée. Cette valeur est celle de la température extérieure constante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau se rapproche de la température extérieure : 25 °C.

Question 4. a). Une alarme sonore est émise lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour une programmation à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé depuis la coupure avant que l'alarme retentisse, en donnant la durée exacte puis son arrondi à la minute.

1. Au seuil de 36 °C, $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$ et $t = 20\ln(13/11)$ heures.
2. Cette durée vaut environ $200,465$ minutes, soit 200 minutes à la minute près. L'alarme retentit dès que la température devient strictement inférieure au seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Durée exacte : $20\ln(13/11)$ h. À la minute près : 200 min, soit 3 h 20 min.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui initialise H à 0 et T à 38 °C, puis augmente H d'une unité et recalcule T = 13e^(-0,05H) + 25 tant que T ≥ 34.

À $H = 7$, la température calculée vaut $13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34,161$ °C : la condition $T \geq 34$ reste vraie. À $H = 8$, elle vaut $13e^{-0{,}05\times 8} + 25 \approx 33,714$ °C : la boucle s'arrête et affiche H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme de la question précédente permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme avance heure par heure et s'arrête au premier entier H pour lequel la température calculée est strictement inférieure à 34 °C. Il détermine donc le premier nombre entier d'heures après la coupure où l'eau passe sous ce seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Il faut attendre 8 heures pour que l'eau passe sous 34 °C.

2. Contrôle qualité du blé, poids des sacs et clientèle de la minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité d'échantillons de pâte et l'humidité de livraisons de blé, puis conditionne la farine dans des sacs dont le poids suit une loi normale. L'exercice étudie aussi les probabilités qu'artisans et boulangers industriels testent une nouvelle farine, La Romaine, ainsi que le nombre de clients concernés dans un échantillon.

Partie A

Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité des cinq échantillons, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, calculer la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. La somme des carrés des écarts à la moyenne vaut 1660, donc l'écart-type de la série est $\sqrt{1660/5}$, soit $18,22$ mm au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est de 18 mm, vérifier si l'une des cinq valeurs est en dehors de l'intervalle [x̄ - 2σ ; x̄ + 2σ], puis conclure si le technicien doit procéder à un nouveau test sur cinq échantillons.

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, on obtient :

Borne inférieure	Borne supérieure
$76 - 2 \times 18 = 40$ mm	$76 + 2 \times 18 = 112$ mm

Les mesures, de 55 à 104 mm, appartiennent toutes à cet intervalle. Aucun nouveau test n'est nécessaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Toutes les valeurs sont dans $[40; 112]$ mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. Deux camions apportent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Sachant que le cahier des charges exige un taux inférieur à 13 % dans un même silo, montrer que le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans un silo vide.

La masse d'eau contenue dans le blé est $29\,540 \times 0,124 + 14\,540 \times 0,141 = 5\,713,1$ kg, pour une masse totale de $29\,540 + 14\,540 = 44\,080$ kg. Le taux d'humidité du mélange est donc $\frac{5\,713,1}{44\,080} \times 100 \approx 12,961\,\%$, inférieur à 13 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux d'humidité : environ 12,961 % ; déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. Le poids X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable : $Z = \frac{X-25{,}2}{0{,}1}$. Pour $X = 25$, on obtient $Z = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0{,}0228$ d'après la loi normale centrée réduite, soit $0{,}023$ au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0{,}023$.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 - h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^-2 près.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent entre $\mu - 1{,}96\sigma$ et $\mu + 1{,}96\sigma$. La demi-largeur cherchée est donc $h = 1{,}96 \times 0{,}1 = 0{,}196$ kg, soit $0{,}20$ kg au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h = 0{,}20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La courbe représentée est beaucoup trop étalée pour un écart-type de $0{,}1$ kg. En effet, pour cette loi normale, environ 95 % des sacs devraient peser entre $25{,}2 - 1{,}96 \times 0{,}1 = 25{,}004$ kg et $25{,}2 + 1{,}96 \times 0{,}1 = 25{,}396$ kg. Or, la courbe du graphique s'étend sur plusieurs kilogrammes autour de 25,2 kg.

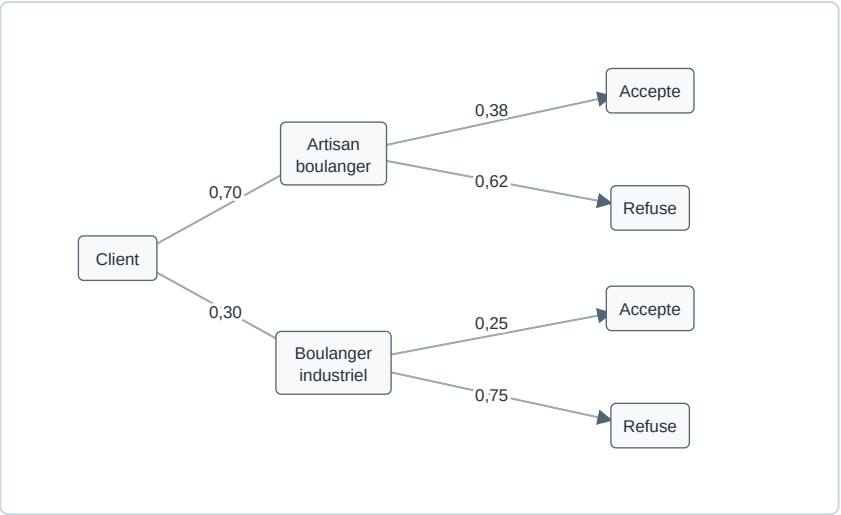
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée pour une loi normale d'écart-type 0,1 kg.

Partie C

Question 1. Représenter par un arbre pondéré la situation suivante : 70 % des clients sont des artisans boulangers, 38 % des artisans acceptent de tester La Romaine et 25 % des boulangers industriels l'acceptent.

La première bifurcation distingue les artisans des boulangers industriels. Les probabilités de refus sont les complémentaires des probabilités d'acceptation : $1 - 0{,}38 = 0{,}62$ pour les artisans et $1 - 0{,}25 = 0{,}75$ pour les industriels.

Arbre pondéré des clients et du test La Romaine



Probabilités des branches : profession, puis acceptation ou refus du test.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Artisans : 0,70 ; industriels : 0,30. Acceptation : 0,38 et 0,25 ; refus : 0,62 et 0,75.

Question 2. a). Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

La probabilité que le client soit artisan et accepte le test est le produit de la probabilité d'être artisan par celle d'accepter parmi les artisans : $P(A \cap T) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les deux catégories de clients sont incompatibles. La probabilité d'accepter est donc la somme des probabilités des deux chemins menant à l'acceptation : $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité d'accepter le test est $0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.

Par la formule des probabilités conditionnelles, $P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$. Ainsi, $P_T(A) = \frac{0,266}{0,341} \approx 0,780$, au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'il soit artisan boulanger est $0,780$.

Question 4. a). La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé La Romaine.

« Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$. Pour la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,341$, la somme des probabilités de $Y = 0$ à $Y = 60$ vaut environ $0,125$, au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'espérance d'une loi binomiale est $E(Y) = np$. Ici, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur des échantillons répétés de 200 clients, environ 68 clients auront en moyenne testé La Romaine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(Y) = 68,2$ clients.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1 et dure 2 heures ; le coefficient n'est pas indiqué sur les pages disponibles. Elle étudie le refroidissement d'un spa, les contrôles qualité d'une minoterie, une loi normale appliquée au poids des sacs, puis les probabilités conditionnelles et une loi binomiale liées à la farine La Romaine.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution de y' + ay = b, avec a non nul, est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Le taux d'humidité d'un mélange est la moyenne des taux de chaque lot pondérés par leurs masses.
- Pour une loi normale, la probabilité d'un intervalle se calcule à l'aide de la fonction de répartition et de la moyenne comme centre.
- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np et P(X ≤ k) se calcule avec la fonction de répartition binomiale.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et les arrondis demandés : heures, minutes, degrés, kilogrammes ou probabilités.
- Pour le mélange des camions, pondérer chaque taux d'humidité par la masse de blé correspondante.
- Dans un arbre, distinguer les probabilités inscrites sur les branches des probabilités d'intersection.
- Interpréter les résultats dans le contexte lorsque la consigne le demande et vérifier leur cohérence avec les données.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du spa ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, puis chercher une solution constante particulière. La solution générale est leur somme. Appliquer ensuite la condition initiale f(0) = 38 pour déterminer la constante et obtenir le modèle de température.

Q : Comment calculer l'humidité après le mélange des deux camions ?

Calculer la masse d'eau correspondant à chaque livraison en multipliant la masse de blé par son taux d'humidité. Additionner ces masses, puis diviser par la masse totale de blé et comparer le taux obtenu à 13 %.

Q : Comment gérer le temps sur cette épreuve de mathématiques ?

Les parties indépendantes peuvent être abordées séparément. Avancer sans s'attarder sur un calcul bloquant, réserver du temps aux probabilités et aux arrondis, puis relire les unités et les interprétations demandées.

Q : Quels critères faut-il respecter pour les réponses numériques ?

Présenter une démarche lisible, conserver une précision suffisante pendant les calculs et appliquer l'arrondi demandé à la fin. Ajouter une interprétation lorsque la consigne le demande et préciser les unités pertinentes.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2023/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.