Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2023/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle, puis par des limites, des variations, un algorithme et une intégrale.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l'un des facteurs est nul.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en s'appuyant sur le tableau fourni.

1. L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes : -1 et -4.
2. D'après le tableau fourni, les solutions sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A : Conditions initiales

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de −10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La distance OM est représentée par $f(t)$. À l'instant initial, elle vaut 20 cm. La vitesse de rapprochement est la dérivée de cette distance et l'énoncé précise qu'elle est négative.

- Distance initiale : 20 cm.
- Vitesse initiale : -10 cm·s^{-1}.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On substitue $t = 2$ dans l'expression de f :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette valeur est la distance OM exacte au bout de deux secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\mathrm{OM} = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}156$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est exacte et justifier.**

La fonction est strictement décroissante et continue. Il suffit donc de comparer la distance à 4 secondes au seuil de fermeture :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274$ cm.
- Cette valeur est inférieure à 0,5 cm, donc le seuil a été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B : Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ tend donc vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite de f que sa courbe représentative possède une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie. La courbe admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$.

Son équation est $y = 0$, l'axe des abscisses.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

En appliquant $(e^{at})' = ae^{at}$ à chacun des deux termes, on obtient :

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f décroît de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant les valeurs de f(t) arrondies au centième et la valeur de vérité de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

La boucle continue tant que $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs du tableau sont arrondies au centième ; la première condition fausse marque l'arrêt.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

1. À chaque passage, t augmente de 0,1 s.
2. À $t = 3{,}8$, la distance est encore supérieure à 0,5 cm ; à $t = 3{,}9$, elle vaut environ 0,47 cm et la condition devient fausse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé selon le critère de 0,5 cm.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, en évaluant aux bornes puis en divisant par 4 :

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4 = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

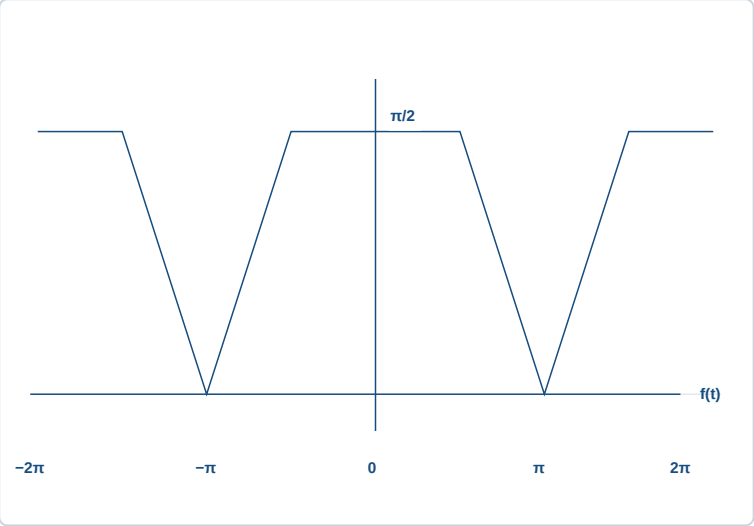
2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire

Une fonction paire et périodique de période 2π est définie par morceaux sur [0 ; π]. L'exercice porte sur son tracé, ses coefficients de Fourier, la représentation graphique d'une somme partielle et l'évaluation d'une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [−2π ; 2π].

Sur chaque période de longueur 2π, $f(t) = \pi/2$ sur $[-\pi/2; \pi/2]$, puis décroît linéairement jusqu'à 0 en π. La parité et la périodicité complètent le tracé sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Représentation de f sur [−2π ; 2π]



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Tracé pair et périodique de période 2π, nul en $t = \pm\pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $b_n = 0$.

Sur une période symétrique $[-\pi; \pi]$, b_n est proportionnel à l'intégrale de $f(t)\sin(nt)$. La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, donc leur produit est impair. Son intégrale sur cet intervalle symétrique est nulle.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période vaut $T = 2\pi$. La pulsation associée est $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, donc $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient de Fourier a₀ est égal à 3π/8.

Par le formulaire et la parité, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Ainsi,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right).$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π − t)cos(nt)dt.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, on sépare l'intégrale en $\pi/2$, en utilisant les deux expressions de f données sur les intervalles.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

Question 6. En admettant que aₙ = 2/(πn²)(cos(nπ/2) − cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On remplace successivement n par 1, 2 et 3 dans la formule admise. Les différences de cosinus obtenues sont respectivement 1, -2 et 1, puis on applique le facteur $2/(\pi n^2)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire l'expression de la somme partielle s₃(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) − (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. En utilisant $b_n = 0$, puis les coefficients calculés aux questions précédentes, on obtient :

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.

La somme partielle présente des minima arrondis au voisinage de $t = \pm\pi$, comme sur la courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = $(a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

En remplaçant les coefficients dans la formule donnée :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right].$$

On arrondit à 10^{-4} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

L'erreur relative est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, la valeur correspondante est $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices portent sur la fermeture d'un tiroir modélisée par une équation différentielle et une étude de fonction, puis sur les séries de Fourier d'une fonction périodique paire et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La distance du tiroir est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$; sa dérivée représente la vitesse.
- Pour une fonction périodique de période T, la pulsation fondamentale est $\omega = 2\pi/T$.
- Pour une fonction paire, les coefficients b_n sont nuls et les coefficients a_n se calculent avec la formule adaptée à la parité.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f(t) est une distance en centimètres et t est exprimé en secondes.
- Pour établir les conditions initiales, tenir compte du sens du mouvement et du signe de la vitesse.
- Dans l'algorithme, tester $f(t) > 0,5$ à chaque étape et tenir compte de l'incrémentation de t de 0,1.
- En séries de Fourier, distinguer le coefficient constant a_0 des coefficients a_n et utiliser la période donnée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser la vitesse initiale dans l'exercice du tiroir ?

La distance initiale fournit f(0). La vitesse négative indiquée correspond à f'(0) : son signe traduit le rapprochement du point M vers le point O. Il faut donc conserver ce signe dans les conditions initiales.

Q : Pourquoi les coefficients b_n de Fourier sont-ils nuls ici ?

La fonction f est paire, tandis que $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Ainsi, $b_n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment suivre l'algorithme sans manquer la valeur où il s'arrête ?

L'algorithme commence avec t = 0 et ajoute 0,1 tant que $f(t) > 0,5$. Après chaque incrément, il reteste la condition. La valeur finale de t est celle pour laquelle la condition devient fausse.

Q : Quelles conventions de notation faut-il respecter pour les coefficients de Fourier ?

Le formulaire définit a_0 comme le coefficient constant et a_n, b_n pour n supérieur ou égal à 1. Utiliser $\omega = 2\pi/T$, puis la formule simplifiée pour a_n lorsque f est paire.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2023/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.