Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités de défaut, durée de vie de tubes fluorescents et conformité de rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2022/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m·s⁻¹ avant d'être ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'exercice étudie cette fonction, l'arrêt du chariot, la distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

Pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. Ainsi, pour tout t, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Elle vérifie donc l'équation (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La différence entre une solution de (E) et la solution particulière $g(t) = 5$ vérifie l'équation homogène (E_0). On ajoute donc 5 à la famille des solutions trouvées en 1.a.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la famille des solutions de (E), la condition $f(0) = 20$ donne $k + 5 = 20$, donc $k = 15$. On remplace ensuite k par cette valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ tend vers $15 \times 0 + 5 = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En admettant que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ sur $[0; +\infty[$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

La vitesse décroît vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre cette valeur. Elle reste donc toujours positive et ne s'annule pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. **Soit F définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

En dérivant F, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$, donc F est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. **À l'aide de l'intégrale donnée pour la distance parcourue, calculer la valeur exacte de la distance entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$, soit environ $15,3251\ \mathrm{m}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir l'unique développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro parmi les propositions. Recopier la réponse retenue sans justification.**

La partie régulière affichée est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, le développement limité à l'ordre 2 est celui qui ajoute un reste en $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Réponse : troisième proposition.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente en l'abscisse 0 passe par $(0; f(0)) = (0; 20)$ et a pour coefficient directeur $f'(0) = -12$. Son équation est $y = f(0) + f'(0)t$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités de défaut, durée de vie de tubes fluorescents et conformité de rivets

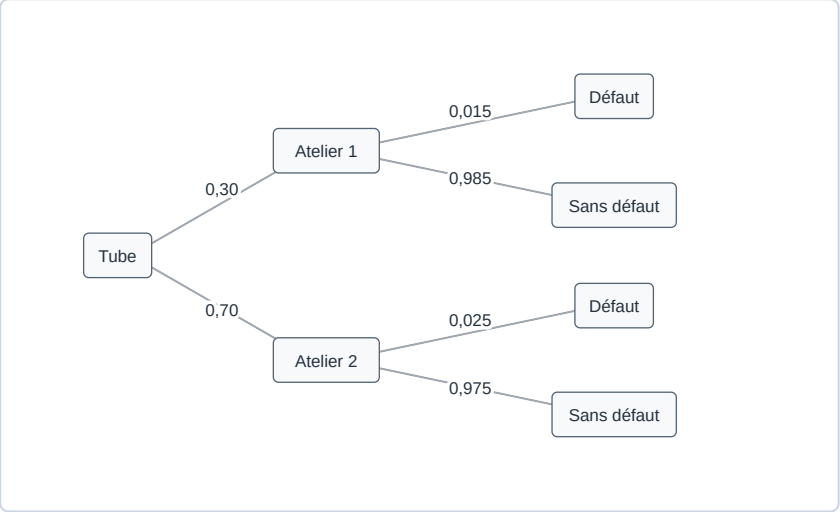
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, et l'exercice étudie les probabilités de défaut selon l'atelier ainsi que la durée de bon fonctionnement des tubes. Il porte aussi sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation de production des tubes dans les deux ateliers et les probabilités de défaut correspondantes.

Les premières branches indiquent l'atelier d'origine. Depuis chaque atelier, on sépare les tubes défectueux des tubes sans défaut, avec les probabilités conditionnelles correspondantes.

Arbre pondéré de production des tubes



Les probabilités des deux premières branches sont les proportions produites par chaque atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : atelier 1 (0,30), atelier 2 (0,70) ; défaut : 0,015 et 0,025 ; sans défaut : 0,985 et 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

On multiplie la proportion issue de l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier : $P(A_1 \cap D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 % de la production totale.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube présente un défaut est P(D) = 0,0195.**

Par la formule des probabilités totales, $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. Ainsi, $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$. Les données de l'énoncé donnent donc 0,022, et non la valeur 0,0195 demandée dans la consigne.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Avec les données fournies, $P(D) = 0,022$. La valeur 0,0195 inscrite dans la consigne est erronée.

Question 4. **Sachant qu'un tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{P(A_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$. On obtient $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$ et $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un tube sans défaut provienne de l'atelier 2 est environ $0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer l'espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Donc $E(T) = \dfrac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures : c'est la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Durée moyenne de bon fonctionnement : $E(T) = 10\,000$ heures.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Ainsi, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0,8} \approx 0,5507$. La loi étant continue, les probabilités pour $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ sont égales.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 0,55$.

Question 3. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser t est le complément de la probabilité de ne pas dépasser t, donc $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir de l'échantillon de 1 000 rivets, dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes.**

L'estimation ponctuelle est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon : $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. **Déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée f pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %, et arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

La formule de l'énoncé donne $\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$. Avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut environ 0,009677 ; les bornes arrondies au millième sont 0,965 et 0,985.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \ ; \ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Deux exercices de 10 points abordent le freinage d'un chariot, la conformité de tubes et de rivets, les équations différentielles, l'analyse, les probabilités et l'intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale de $y' + ay = 0$ est $y(t) = ke^{-at}$; pour l'équation complète, on ajoute une solution particulière.
- Si $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, alors sa limite en $+\infty$ vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale $y = 5$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % donné pour une fréquence f sur n essais est $[f - 1,96\sqrt{f(1-f)/n} ; f + 1,96\sqrt{f(1-f)/n}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle complète, identifier une solution particulière puis ajouter les solutions de l'équation homogène.
- Pour discuter l'arrêt du chariot, interpréter la vitesse et sa limite en tenant compte de la fonction étudiée.
- Dans l'arbre pondéré, placer les probabilités conditionnelles sur les branches et distinguer intersection et probabilité conditionnelle.
- Respecter les unités et les arrondis demandés, notamment au centimètre, à 10^{-2} et à 10^{-3} près.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle avec une condition initiale ?

Déterminez d'abord une solution particulière de l'équation complète, puis ajoutez la solution générale de l'équation homogène. Remplacez ensuite t par 0 et imposez f(0) = 20 pour fixer la constante.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle à partir de l'arbre des ateliers ?

La probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les probabilités de ses branches. Pour une probabilité conditionnelle, divisez la probabilité de l'intersection par celle de l'événement connu, si elle est non nulle.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices valant chacun 10 points et précise que les parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Repérez les questions accessibles, répartissez le temps et gardez une période pour vérifier calculs et arrondis.

Q : Quels éléments faut-il rendre visibles pour faciliter la notation ?

Présentez les formules et les étapes utiles, puis exprimez les résultats avec les unités ou l'interprétation demandée. Respectez les arrondis. Pour le QCM du développement limité, recopiez une seule proposition, sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2022/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.