Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2019 • Code sujet : **MATGRC1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 ou 3 selon la spécialité**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la chute d'un parachutiste (11 questions) **Page 3**

2. Contrôle statistique de poutrelles métalliques IPE 120 (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 4-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la chute d'un parachutiste

La vitesse d'un parachutiste avant l'ouverture de son parachute est modélisée par une équation différentielle, avec une masse de 80 kg, un coefficient de résistance de l'air de 25 et une accélération de la pesanteur de 10 m·s⁻². L'étude porte ensuite sur la fonction de vitesse obtenue, son graphique, ses variations, le dépassement d'un seuil de vitesse et sa valeur moyenne.

Partie A : modélisation

Question 1. À partir de l'équation différentielle du modèle et des données numériques, montrer que la vitesse V est solution de l'équation (E) : y' + 0,3125y = 10.

On divise l'équation du modèle par m, non nul : $y' + \frac{k}{m}y = g$. Avec les données du sujet, $\frac{k}{m} = \frac{25}{80} = 0{,}3125$, et $\frac{mg}{m} = 10$. La vitesse vérifie donc l'équation différentielle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $V' + 0{,}3125V = 10$.

Question 2. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,3125y = 0.

On réécrit l'équation homogène sous la forme $y' = -0{,}3125y$. Pour une équation de la forme $y' = ay$, les solutions sont $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, le coefficient est $-0{,}3125$, ce qui donne la famille de solutions ci-dessous.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}3125t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 3. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,3125y = 10.

Si $y(t) = c$ est constante, alors $y'(t) = 0$. En remplaçant dans (E), on obtient $0{,}3125c = 10$, donc $c = \frac{10}{0{,}3125} = 32$. Cette fonction constante est une solution particulière de l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 32$.

Question 4. En déduire les solutions générales de l'équation différentielle (E).

La solution générale de l'équation complète est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée. La solution particulière constante vaut 32, et les solutions homogènes sont $Ce^{-0{,}3125t}$. On obtient ainsi toutes les solutions de (E).

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 32 + Ce^{-0{,}3125t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 5. Déterminer une expression de la vitesse V(t) du parachutiste à l'instant t.

La vitesse est de la forme $V(t) = 32 + Ce^{-0{,}3125t}$. La condition initiale $V(0) = 0$ donne $0 = 32 + C$, donc $C = -32$. En reportant cette constante dans la solution générale, on obtient l'expression de la vitesse pour $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

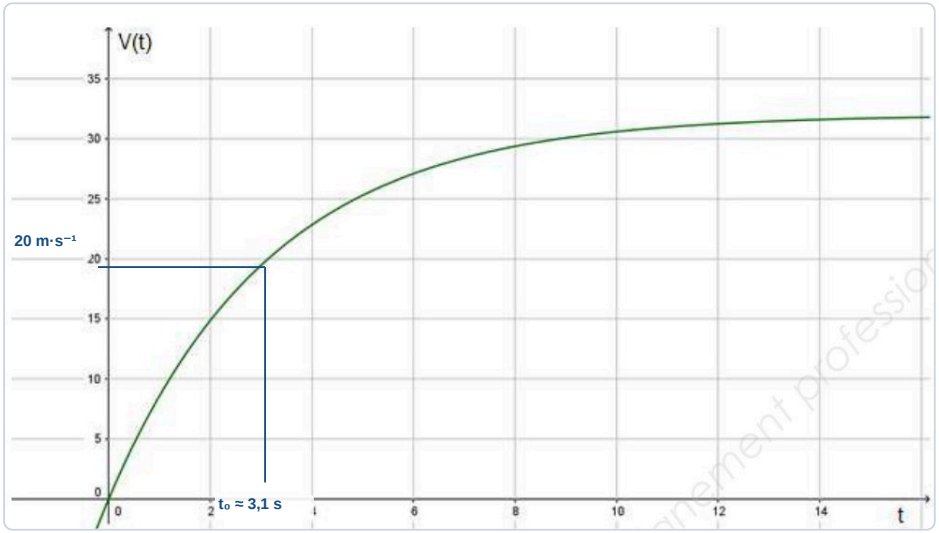
$V(t) = 32(1 - e^{-0{,}3125t})\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pour $t \geq 0$.

Partie B : étude de la chute

Question 1.a. À partir du graphique de V, estimer une valeur arrondie de l'instant t_0 à partir duquel la vitesse dépasse 20 m·s⁻¹.

On lit sur le graphique l'abscisse du point d'intersection entre la courbe de V et le niveau $20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. L'intersection se situe légèrement après 3 secondes. Cette lecture graphique est approximative, contrairement à la valeur obtenue par calcul à la question suivante.

Lecture graphique du seuil de 20 m·s⁻¹



✓ RÉPONSE À RETENIR

Lecture graphique : $t_0 \approx 3{,}1\ \mathrm{s}$.

Question 1.b. Retrouver par le calcul la valeur exacte de t_0.

À l'instant seuil, $32(1 - e^{-0{,}3125t_0}) = 20$, donc $e^{-0{,}3125t_0} = \frac{3}{8}$. En prenant le logarithme, on obtient $t_0 = \frac{\ln(8/3)}{0{,}3125}$. Comme V est croissante, elle dépasse 20 pour $t > t_0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t_0 = 3{,}2\ln(8/3)$ s, soit environ $3{,}14$ s.

Question 2.a. Donner l'expression V'(t) de la dérivée de la vitesse.

On dérive $V(t) = 32(1 - e^{-0{,}3125t})$. La dérivée de l'exponentielle est $-0{,}3125e^{-0{,}3125t}$. Le signe moins dans la parenthèse annule ce signe négatif, puis la multiplication par 32 donne le coefficient 10.

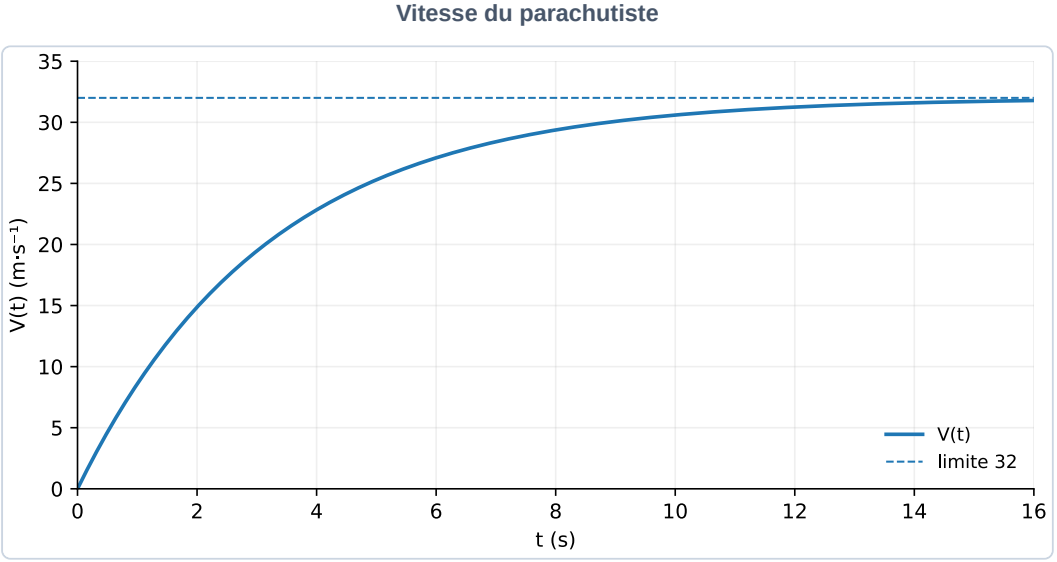
✓ RÉPONSE À RETENIR

$V'(t) = 10e^{-0{,}3125t}$ m · s^{-2}.

Question 2.b. Étudier le sens de variation de V sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}3125t} > 0$, donc $V'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante. De plus, $V(0) = 0$ et la limite de $V(t)$ en $+\infty$, fournie dans le sujet, vaut 32.

t	**0**	$+\infty$
$V'(t)$	$+$	
$V(t)$	0	↗ 32



La vitesse croît vers 32 m·s⁻¹ sans atteindre cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

V est strictement croissante de 0 vers la limite 32 m · s^{-1}.

Question 3. **Déterminer si le parachutiste peut atteindre une vitesse de 130 km·h⁻¹.**

Le modèle donne une vitesse strictement croissante qui tend vers $32\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre cette limite. Or $130\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = \frac{130}{3{,}6} \approx 36{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, valeur supérieure à la limite du modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : $130\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} \approx 36{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} > 32\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4. **Calculer la vitesse moyenne du parachutiste lors des deux premières secondes de chute. Le résultat peut être arrondi à l'unité ; utiliser la formule de valeur moyenne rappelée dans le sujet.**

La valeur moyenne sur $[0;2]$ est $\frac{1}{2}\int_0^2 32(1-e^{-0{,}3125t})\,dt$. Une primitive est $32t + \frac{32}{0{,}3125}e^{-0{,}3125t}$. L'évaluation entre les bornes donne environ $8{,}205\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, puis on arrondit à l'unité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Vitesse moyenne : $8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à l'unité près.

2. Contrôle statistique de poutrelles métalliques IPE 120

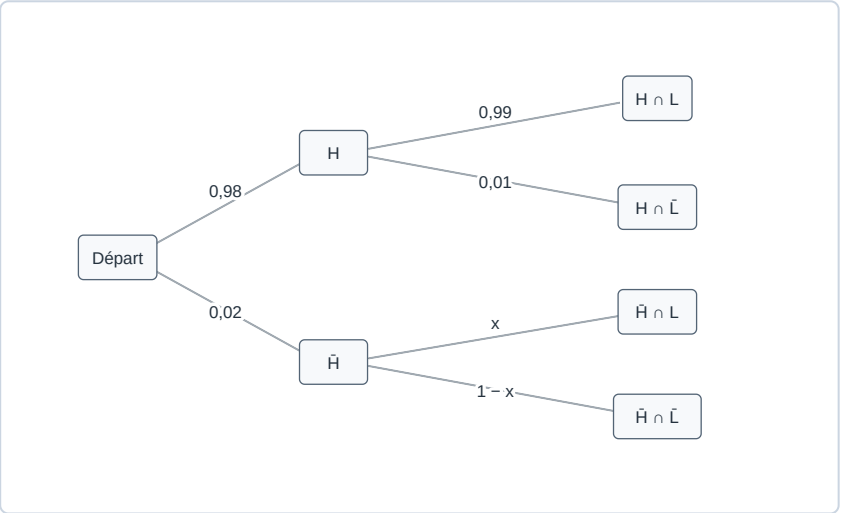
Une fonderie produit des poutrelles IPE 120, dont le schéma de coupe et les dimensions nominales sont fournis. L'exercice étudie la conformité des dimensions externes et de l'épaisseur de l'âme, puis un test statistique destiné à vérifier le réglage d'une scie automatique.

Partie A : dimensions externes

Question 1. À partir des taux de conformité indiqués pour la hauteur de l'âme et pour la largeur de la semelle lorsque la hauteur est conforme, représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

La première bifurcation distingue la hauteur conforme, de probabilité 0,98, et non conforme, de probabilité 0,02. Après une hauteur conforme, les probabilités conditionnelles de largeur conforme et non conforme sont respectivement 0,99 et 0,01. Les probabilités de largeur après une hauteur non conforme ne sont pas données ; on les note donc x et 1 − x.

Arbre de conformité des dimensions externes



H : hauteur conforme ; L : largeur conforme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : H (0,98), $\bar{H}$ (0,02) ; depuis H : L (0,99), $\bar{L}$ (0,01) ; depuis $\bar{H}$: L (x), $\bar{L}$ (1 − x).

Question 2. On note E l'événement « les dimensions externes de la poutrelle sont conformes », c'est-à-dire que la hauteur de l'âme et la largeur de la semelle sont conformes. Justifier que P(E) = 0,9702.

Les dimensions externes sont conformes si la hauteur et la largeur sont conformes. On multiplie donc la probabilité que la hauteur soit conforme par la probabilité conditionnelle que la largeur le soit lorsque la hauteur est conforme : $P(E) = P(H)P(L \mid H) = 0{,}98 \times 0{,}99 = 0{,}9702$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les dimensions externes soient conformes est $P(E) = 0{,}9702$.

Question 3. **Sachant que la largeur de la semelle est conforme pour 98,5 % des poutrelles, déterminer par un calcul si l'affirmation est exacte : « 26 % des poutrelles dont la hauteur d'âme est non conforme présentent également un défaut de largeur de la semelle. »**

Notons $q = P(L \mid \overline{H})$. La formule des probabilités totales donne $0{,}985 = 0{,}98 \times 0{,}99 + 0{,}02q$, d'où $q = 0{,}74$. Parmi les poutrelles de hauteur non conforme, la probabilité d'un défaut de largeur est donc $1 - q = 0{,}26$. Cette valeur correspond bien aux 26 % annoncés.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'affirmation est exacte : 26 % des poutrelles de hauteur non conforme ont aussi un défaut de largeur.

Question 4.a. **Pour un prélèvement de 20 poutrelles assimilé à des tirages avec remise, N désignant le nombre de poutrelles dont les dimensions externes sont conformes, déterminer et justifier la loi de probabilité de N, puis préciser ses paramètres.**

Chaque prélèvement est un tirage avec remise : les tirages sont indépendants et la probabilité qu'une poutrelle ait ses dimensions externes conformes est toujours $0{,}9702$. La variable N compte les succès sur 20 tirages. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}9702$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;\,0{,}9702)$: 20 tirages indépendants, probabilité de conformité 0,9702.

Question 4.b. **Calculer la probabilité qu'un lot de 20 poutrelles contienne au moins une poutrelle dont les dimensions externes sont non conformes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.**

L'événement demandé est le contraire de « les 20 poutrelles sont conformes ». La probabilité que les 20 soient conformes est $0{,}9702^{20}$, par indépendance des tirages. Ainsi, la probabilité d'avoir au moins une poutrelle non conforme vaut $1 - 0{,}9702^{20}$, soit environ $0{,}454$ à 10^{-3} près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un lot contienne au moins une poutrelle non conforme est $0{,}454$, arrondie à 10^{-3}.

Partie B : épaisseur de l'âme

Question Calcul. La variable aléatoire X, qui associe à chaque poutrelle l'épaisseur de son âme, suit une loi normale d'espérance 4,4 mm et d'écart type 0,02 mm. L'épaisseur est conforme si l'écart à la valeur théorique de 4,4 mm est inférieur ou égal à 1 % de cette valeur. Calculer la probabilité qu'une poutrelle prise au hasard ait une épaisseur d'âme conforme et arrondir à 10^{-3}.

La tolérance vaut $0{,}01 \times 4{,}4 = 0{,}044$ mm : l'épaisseur conforme vérifie donc $4{,}356 \leq X \leq 4{,}444$. Après centrage-réduction, cela devient $-2{,}2 \leq Z \leq 2{,}2$, où Z suit la loi normale centrée réduite. La probabilité est $2\Phi(2{,}2) - 1 \approx 0{,}972$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'une poutrelle ait une épaisseur d'âme conforme est $0{,}972$, arrondie à 10^{-3}.

Partie C : contrôle de conformité

Question 1. Pour le test bilatéral au seuil de 5 % portant sur l'hypothèse H_0 : « la longueur moyenne en mètre des poutrelles débitées par la scie est m = 2 », donner l'hypothèse alternative H_1.

Le test est bilatéral : l'hypothèse alternative considère les deux possibilités d'écart à la valeur de référence, une moyenne inférieure ou une moyenne supérieure à 2 m. Elle s'écrit donc $m \neq 2$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'hypothèse alternative du test bilatéral est $H_1 : m \neq 2$, la moyenne pouvant être inférieure ou supérieure à 2 m.

Question 2. Déterminer l'intervalle I = [2 − h ; 2 + h] tel que, sous l'hypothèse H_0, $P(\bar{L} \in I) = 0{,}95$. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-4}.

Sous H_0, l'écart type de la moyenne est $\sigma_0 = 0{,}001/\sqrt{100} = 0{,}0001$. L'intervalle central de probabilité 0,95 d'une loi normale centrée réduite correspond à $[-1{,}96; 1{,}96]$. Ainsi, $h = 1{,}96 \times 0{,}0001 = 0{,}000196$, et les bornes arrondies à 10^{-4} sont 1,9998 et 2,0002.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'intervalle recherché, bornes arrondies à 10^{-4}, est $I = [1{,}9998\,;\,2{,}0002]$ m.

Question 3. Énoncer la règle de décision de ce test.

On compare la moyenne observée à l'intervalle I déterminé sous H_0. Si elle appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0. Si elle est à l'extérieur, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Ne pas rejeter H_0 si $\overline{L} \in [1{,}9998\,;\,2{,}0002]$ m ; sinon, rejeter H_0 au seuil de 5 %.

Question 4. Au seuil de décision de 5 %, déterminer si, compte tenu de la longueur moyenne observée de 1,9997 m sur l'échantillon de 100 poutrelles, le technicien peut estimer que la scie est bien réglée.

La moyenne observée est $1{,}9997$ m, inférieure à la borne basse de l'intervalle d'acceptation, $1{,}9998$ m. Elle n'appartient donc pas à cet intervalle : selon la règle du test, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Non : au seuil de 5 %, le test rejette H_0. La moyenne observée ne permet donc pas de conclure que la scie est bien réglée.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2019)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement C1, session 2019, porte le code MATGRC1, dure deux heures et son coefficient vaut 2 ou 3 selon la spécialité. Elle comporte deux exercices notés chacun sur 10 points : la modélisation de la chute d'un parachutiste par équation différentielle, puis l'étude statistique de poutrelles IPE 120, avec probabilités, lois normales et test bilatéral.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière constante b/a et de la solution de l'équation homogène.
- La valeur moyenne de f sur [a ; b] est 1/(b − a) multiplié par l'intégrale de f entre a et b.
- Pour n tirages indépendants de probabilité de succès p, le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p.
- Pour une moyenne d'échantillon de taille n, l'écart type est σ/√n ; un test bilatéral répartit le risque entre les deux extrémités.

Points de vigilance & attentes du jury

- Remplacer les paramètres par leurs valeurs dans l'équation différentielle et vérifier les unités avant de déterminer la solution.
- Pour un seuil de vitesse, distinguer l'estimation graphique de la détermination exacte par résolution de l'équation.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer une probabilité conditionnelle d'une probabilité d'intersection.
- Pour le test, utiliser l'écart type de la moyenne et comparer l'observation à l'intervalle de décision au seuil indiqué.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la chute ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, puis déterminer une solution particulière constante de l'équation complète. La solution générale est leur somme ; la condition initiale V(0) = 0 permet ensuite de fixer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité de conformité de l'épaisseur ?

Traduire la tolérance de 1 % en intervalle autour de 4,4 mm. Standardiser ensuite les deux bornes avec la moyenne 4,4 et l'écart type 0,02, puis calculer la probabilité comprise entre ces bornes.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et la calculatrice est autorisée. Répartissez le temps entre les deux exercices, avancez question par question et gardez quelques minutes pour contrôler les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Qu'est-ce qui est attendu dans la rédaction des réponses ?

Le sujet précise que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Présentez les étapes utiles, justifiez les probabilités et décisions, et respectez les unités et les arrondis indiqués.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 4-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.