Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2019 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Échauffement d’un fil électrique : équation différentielle, étude de fonction et dépassement de seuil (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de pneumatiques, durée de fonctionnement d’une machine et conformité de ressorts (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 3-Sujet.pdf

1. Échauffement d'un fil électrique : équation différentielle, étude de fonction et dépassement de seuil

L'exercice modélise l'évolution de la température d'un fil électrique parcouru par un courant constant, à partir d'une température initiale de 18 °C. Il mobilise équations différentielles, étude d'une fonction exponentielle, développement limité, lecture graphique et algorithme de recherche d'un seuil.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1° a). Résoudre sur l'intervalle [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,05$, et la constante réelle k reste arbitraire puisqu'aucune condition initiale n'est imposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,05t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1° b). Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 40 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,05y = 2.

La fonction constante $g(t) = 40$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. Vérifions l'équation :

$$g'(t) + 0,05g(t) = 0 + 0,05 \times 40 = 2.$$

L'égalité étant vérifiée pour tout t, g est bien une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 40$ est une solution de l'équation différentielle.

Question 1° c). Déduire les solutions définies sur [0, +∞[de l'équation différentielle y' + 0,05y = 2.

Comme $g(t) = 40$ est une solution particulière, les solutions de l'équation complète s'obtiennent en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène associée. D'après la question précédente, le terme ajouté est $ke^{-0,05t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 40 + ke^{-0,05t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Déterminer l'expression de la fonction température f, solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 18.

La solution générale est $f(t) = 40 + ke^{-0,05t}$. À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1. La condition initiale donne donc :

$f(0) = 40 + k = 18$, d'où $k = 18 - 40 = -22$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = -22e^{-0{,}05t} + 40$.

B. Étude de la fonction f

Question 1° a). En utilisant la limite fournie pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) = −22e^(−0,05t) + 40 lorsque t tend vers +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, $e^{-0{,}05t}$ tend vers zéro. Le terme $-22e^{-0{,}05t}$ tend donc aussi vers zéro, et il reste la constante 40.

✓ RÉPONSE À RETENIR

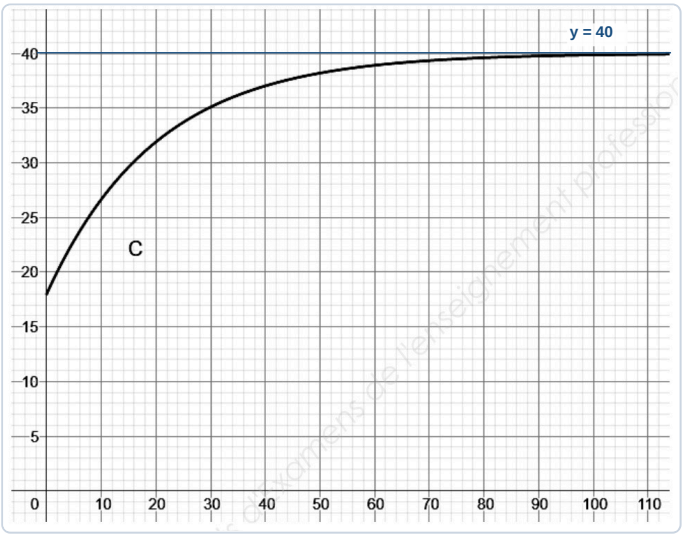
$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 40$.

Question 1° b). Déduire de la limite une équation de l'asymptote à la courbe C, puis tracer cette asymptote sur la représentation graphique de l'annexe.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 40, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation :

Sur l'annexe, tracer la droite horizontale passant par la graduation 40 °C. La courbe s'en approche par-dessous.

Asymptote horizontale de C



✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 40$.

Question 2° a). En admettant l'expression fournie de f', étudier les variations de f sur [0, +∞[.

D'après le résultat fourni, $f'(t) = \frac{11}{10}e^{-t/20}$. Pour tout $t \geq 0$, cette dérivée est strictement positive, car ses deux facteurs le sont. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de sa valeur initiale 18 vers sa limite 40.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante de 18 vers 40.

Question 2° b). Dresser le tableau de variation de f sur [0, +∞[.

La dérivée est positive sur tout l'intervalle. La fonction croît donc de $f(0) = 18$ vers sa limite 40, qui n'est pas atteinte à temps fini.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	+	
Variation de f	18	↗ 40

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 18 vers 40.

Question 3° a). Parmi les propositions, recopier l'unique équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0. Aucune justification n'est demandée.

La tangente en $t = 0$ passe par $(0; 18)$ et a pour pente $f'(0) = \frac{11}{10}$. Son équation est donc $y = 18 + \frac{11}{10}t$. Le terme en t^2 du développement limité ne fait pas partie de l'équation de la tangente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 18 + \frac{11}{10}t$.

Question 3° b). Parmi les propositions, recopier l'unique valeur de la vitesse de chauffe f'(0), exprimée en degrés Celsius par seconde. Aucune justification n'est demandée.

La vitesse de chauffe initiale est $f'(0)$. En remplaçant t par zéro dans $f'(t) = \frac{11}{10}e^{-t/20}$, on obtient :

$$f'(0) = \frac{11}{10}e^{0} = \frac{11}{10} \text{ °C/s.}$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(0) = 1,1$ °C/s.

C. Dépassement d'un seuil et algorithmique

Question 1°. Faire tourner à la main l'algorithme qui augmente t d'une unité tant que f(t) ≤ 21, puis compléter le tableau de l'annexe avec les valeurs successives de t, f(t) arrondie à 10^{-2} et la vérification de la condition.

On calcule $f(t) = -22e^{-0{,}05t} + 40$ pour les entiers successifs. La condition reste vraie jusqu'à $t = 2$, puis devient fausse à $t = 3$. Les valeurs sont arrondies au centième.

Valeur de t	**$f(t)$, arrondie à 10^{-2}**	$f(t) \leq 21$
0	18,00	VRAIE
1	19,07	VRAIE
2	20,09	VRAIE
3	21,06	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété

Valeur de t	Valeur de $f(t)$ Arrondie à 10^{-2}	Condition $f(t) \leq 21$
0	18	VRAIE
1	19,07	VRAIE
2	20,09	VRAIE
3	21,06	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à $t = 3$, car $f(3) \approx 21,06 > 21$.

Question 2°. Indiquer la valeur contenue dans la variable t à la fin de l'algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte du dépassement de 21 °C par le fil.

La boucle continue tant que $f(t) \leq 21$. Cette condition est vraie à $t = 2$, puis fausse à $t = 3$, où la température atteint environ 21,06 °C. La variable conserve donc la première valeur entière de temps pour laquelle le seuil est dépassé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3$ secondes : la température dépasse alors 21 °C.

2. Contrôle de pneumatiques, durée de fonctionnement d'une machine et conformité de ressorts

Un constructeur d'engins de travaux publics sous-traite la fabrication de pneumatiques et de chenilles, et produit des ressorts hélicoïdaux pour les suspensions. Les questions portent sur l'indépendance d'événements, la loi exponentielle appliquée à la durée de fonctionnement d'une machine et l'estimation d'une proportion par intervalle de confiance.

A. Événements indépendants

Question 1°. À partir des probabilités des deux tests et de leur indépendance, calculer la probabilité E1 qu'un pneumatique contrôlé soit conforme, c'est-à-dire qu'il ait validé les deux tests.

La conformité exige la validation simultanée des deux tests, soit l'événement $A \cap B$. Comme A et B sont indépendants, la probabilité de cette intersection est le produit de leurs probabilités : $P(E_1) = P(A)P(B) = 0{,}98 \times 0{,}85 = 0{,}833$. La probabilité cherchée est donc exactement $0{,}833$, soit $83{,}3\ \%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E_1) = 0{,}833$.

Question 2°. Calculer la probabilité E2 qu'un pneumatique contrôlé ne soit pas conforme.

> Ne pas être conforme est l'événement contraire de « valider les deux tests ».

On utilise donc la probabilité complémentaire : $P(E_2) = 1 - P(E_1)$. Avec la probabilité de conformité calculée précédemment, cela donne $P(E_2) = 1 - (0{,}98 \times 0{,}85) = 0{,}167$. Cela correspond aux pneumatiques qui ont échoué à au moins un des tests.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E_2) = 0{,}167$.

Question 3°. Calculer la probabilité E3 qu'un pneumatique contrôlé n'ait validé qu'un seul des deux tests.

Seul test validé	Calcul
Premier test	$0{,}98(1 - 0{,}85)$
Second test	$(1 - 0{,}98)0{,}85$

Ces deux situations sont incompatibles. On additionne donc leurs probabilités : $P(E_3) = 0{,}98 \times 0{,}15 + 0{,}02 \times 0{,}85 = 0{,}164$. Le pneumatique a alors validé exactement un seul des deux tests.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E_3) = 0{,}164$.

B. Loi exponentielle

Question 1°. En utilisant la durée moyenne de bon fonctionnement de 10 heures et la formule de l'espérance d'une loi exponentielle, montrer que le paramètre λ vaut 0,1.

1. Pour une loi exponentielle, l'espérance est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.
2. La durée moyenne donnée vaut 10 heures, donc $10 = \frac{1}{\lambda}$, d'où $\lambda = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Le paramètre est exprimé en heure inverse, puisque la durée est mesurée en heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 0{,}1\ \text{h}^{-1}$.

Question 2° a). Calculer la probabilité que la durée de bon fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 20 heures.

La fonction de répartition d'une loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Ici, $\lambda = 0{,}1$ et la durée considérée est de 20 heures. Ainsi, $P(T \leq 20) = 1 - e^{-0{,}1 \times 20} = 1 - e^{-2} \approx 0{,}864665$. En arrondissant au millième, conformément à la consigne, on obtient la probabilité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \leq 20) \approx 0{,}865$.

Question 2° b). Déterminer la probabilité que la durée de bon fonctionnement de la machine dépasse 15 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est le complément de la probabilité de fonctionnement jusqu'à t. Donc :

- $P(T > 15) = 1 - P(T \leq 15)$;
- $P(T > 15) = 1 - (1 - e^{-0{,}1 \times 15}) = e^{-1{,}5} \approx 0{,}223$.

La valeur est arrondie au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 15) \approx 0{,}223$.

Question 3°. Déterminer la durée médiane de bon fonctionnement t_0, définie par $P(T \leq t_0) = 0{,}5$.

La médiane t_0 vérifie $P(T \leq t_0) = 0{,}5$. En remplaçant dans la fonction de répartition, $1 - e^{-0{,}1 t_0} = 0{,}5$, donc $e^{-0{,}1 t_0} = 0{,}5$. On prend le logarithme : $t_0 = -\frac{\ln(0{,}5)}{0{,}1} = \frac{\ln 2}{0{,}1} \approx 6{,}931$. La durée est exprimée en heures.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t_0 \approx 6{,}931$ heures.

C. Intervalle de confiance

Question 1°. À partir de l'échantillon de 50 ressorts dont 44 sont conformes, donner l'estimation ponctuelle f de la proportion p de ressorts conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion dans la production est la fréquence observée dans l'échantillon. Celui-ci comporte 44 ressorts conformes sur 50, donc $f = \frac{44}{50} = 0{,}88$. La fréquence observée est ainsi de 88 %. Elle fournit l'estimation demandée de la proportion inconnue p de ressorts conformes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0{,}88$, soit $88\ \%$.

Question 2° a). Déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % pour la proportion p, centré sur la fréquence observée f, en utilisant la formule fournie.

Élément	Calcul	Valeur arrondie
Fréquence	$44/50$	$0{,}88$
Marge	$1{,}96\sqrt{\frac{0{,}88(1-0{,}88)}{50}}$	$0{,}090$
Bornes	$0{,}88 \pm \text{marge}$	$0{,}790$ et $0{,}970$

En appliquant la formule fournie et en arrondissant au millième, l'intervalle de confiance centré sur f est obtenu.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}790\ ;\ 0{,}970]$.

Question 2° b). Peut-on affirmer que p est compris dans l'intervalle de confiance obtenu ? Expliquer pourquoi.

Non, on ne peut pas affirmer avec certitude que la proportion réelle p appartient à cet intervalle particulier. Le niveau de confiance de 95 % signifie que, si l'on répétait les prélèvements et construisait un intervalle de la même façon, environ 95 % des intervalles ainsi obtenus contiendraient la proportion réelle. Il s'agit donc d'un niveau de confiance, pas d'une garantie pour cet intervalle précis.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le niveau de confiance de 95 % ne garantit pas que cet intervalle précis contienne p.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2019)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2019, code MATGRB1, durée 2 heures, coefficient selon la spécialité : de 1,5 à 3. Deux exercices de 10 points étudient l'échauffement d'un fil électrique, le contrôle de pneumatiques, la fiabilité d'une machine et la conformité de ressorts. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, algorithmique, probabilités et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' + ay = b, déterminer une solution particulière puis ajouter la solution générale de l'équation homogène associée.
- La fonction température f(t) = −22e^(−0,05t) + 40 est croissante et tend vers 40, son asymptote horizontale.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt).
- L'intervalle de confiance fourni à 95 % est f ± 1,96√(f(1 − f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir déterminé la famille des solutions de l'équation différentielle.
- Dans l'algorithme, calculer les valeurs dans l'ordre et s'arrêter dès que la condition f(t) ≤ 21 devient fausse.
- Distinguer P(T ≤ t) de P(T > t) et utiliser la probabilité complémentaire lorsque la durée dépasse t.
- Dans l'exercice 2, arrondir les résultats approchés à 10^{-3}, sauf indication contraire.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer l'expression de la température à partir de l'équation différentielle ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Utilisez ensuite la condition f(0) = 18 pour déterminer la constante et obtenir l'expression de la température.

Q : Comment calculer la probabilité que la machine fonctionne plus de 15 heures ?

La probabilité de dépasser t est le complément de P(T ≤ t). Pour une loi exponentielle, P(T > t) = e^(−λt). Utilisez le paramètre λ obtenu à partir de la durée moyenne.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices indépendants de 10 points. Répartissez le temps entre les deux, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, contrôler les arrondis et reporter les réponses demandées sur l'annexe.

Q : Quels critères de notation et d'arrondi faut-il respecter ?

Présentez clairement les démarches de calcul lorsque cela est demandé et respectez l'arrondi à 10^{-3} dans l'exercice 2. Pour les deux QCM, une bonne réponse vaut 0,5 point, sans pénalité en cas d'erreur ou d'absence de réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.