Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2019 • Code sujet : **CGMAT** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Défauts de forme et de masse des savons (13 questions) **Page 3**

2. Achat d'un appartement, assurance et location (16 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 2-Sujet.pdf

1. Défauts de forme et de masse des savons

L'entreprise SASSEMBON fabrique des savons à la vanille ou à la noix de coco, qui peuvent présenter des défauts de forme ou de masse. Les questions mobilisent les probabilités, la loi normale et l'indépendance de deux événements.

Partie A : Défaut de forme

Question 1. À partir des données sur les savons à la vanille et à la noix de coco, donner les probabilités P(V), P_V(F) et P_$\overline{V}$($\overline{F}$).

Les 130 savons à la vanille représentent une partie des 200 savons étudiés. Pour les autres probabilités, on reprend directement les fréquences conditionnelles indiquées dans l'énoncé : 2 % de défauts parmi les savons à la vanille et 96 % sans défaut parmi ceux à la noix de coco.

Probabilité	Calcul	Valeur
$P(V)$	$130/200$	$0,65$
$P_V(F)$	Donnée	$0,02$
$P_{\overline{V}}(\overline{F})$	Donnée	$0,96$

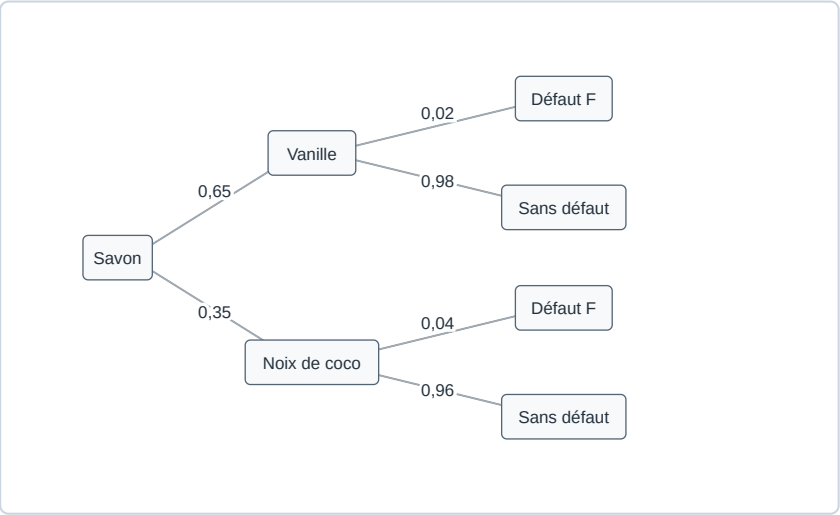
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(V) = 0,65$, $P_V(F) = 0,02$, $P_{\overline{V}}(\overline{F}) = 0,96$.

Question 2. Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.

Le premier niveau distingue les savons à la vanille et ceux à la noix de coco. Sur chaque branche, les probabilités du défaut et de son absence sont complémentaires : pour la noix de coco, la probabilité d'un défaut vaut $1 - 0,96 = 0,04$. L'arbre complet figure ci-dessous.

Arbre des probabilités des défauts de forme



Chaque branche est pondérée par sa probabilité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré ci-dessous.

Question 3. Calculer la probabilité qu'un savon soit à la noix de coco et présente un défaut de forme.

Le cas recherché correspond au chemin « noix de coco puis défaut ». La proportion de savons à la noix de coco est le complément de $P(V)$, soit $1 - 0,65 = 0,35$. Parmi eux, 4 % présentent un défaut de forme, puisque 96 % n'en présentent pas. On multiplie ces probabilités de branches : $P(\overline{V} \cap F) = 0,35 \times 0,04 = 0,014$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(\overline{V} \cap F) = 0,014$, soit 1,4 %.

Question 4. Montrer que la probabilité qu'un savon pris au hasard présente un défaut de forme est égale à 0,027.

Les deux parfums forment une partition des savons. La probabilité d'un défaut total est donc la somme des probabilités des deux chemins conduisant à un défaut :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(V)P_V(F) + P(\overline{V})P_{\overline{V}}(F) \\ &= 0,65 \times 0,02 + 0,35 \times 0,04 = 0,027. \end{aligned}$$

Le résultat correspond à 2,7 % des savons.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(F) = 0,027$, soit 2,7 %.

Question 5. Sachant qu'un savon présente un défaut de forme, déterminer la probabilité qu'il soit à la vanille. Arrondir le résultat au millième.

Par définition de la probabilité conditionnelle, on rapporte la probabilité d'être à la vanille et de présenter un défaut à la probabilité totale d'un défaut. Le numérateur vaut $0,65 \times 0,02$, et le dénominateur vaut $0,027$:

$$P_F(V) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{0,65 \times 0,02}{0,027} \approx 0,48148.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_F(V) \approx 0,481$.

Partie B : Défaut de masse

Question 1. Pour un colis de 150 savons, calculer la masse moyenne du colis en kilogrammes.

La masse moyenne d'un savon est de 100 g. Pour 150 savons, la masse moyenne du colis est donc $150 \times 100 = 15\,000$ g. Comme 1 kg vaut $1\,000$ g, on convertit en divisant par $1\,000$: $15\,000 / 1\,000 = 15$ kg.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La masse moyenne du colis est de 15 kg.

Question 2.a. La masse X d'un savon suit une loi normale d'espérance 100 g et d'écart type 1 g. Déterminer P(X ≤ 98) et arrondir le résultat au millième.

On centre et réduit la masse : $Z = (X - 100)/1$ suit la loi normale centrée réduite. Pour une masse de 98 g, la valeur réduite est $(98 - 100)/1 = -2$. Ainsi, $P(X \leq 98) = P(Z \leq -2)$, soit environ $0,02275$. L'arrondi au millième est $0,023$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X \leq 98) \approx 0,023$.

Question 2.b. Interpréter dans le contexte le résultat obtenu pour P(X ≤ 98).

L'événement $X \leq 98$ décrit les savons dont la masse est inférieure ou égale à la limite basse de conformité. La probabilité obtenue représente donc la proportion de savons trop légers, environ 2,3 % de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Environ 2,3 % des savons pèsent au plus 98 g.

Question 3. Un savon est conforme si sa masse est comprise entre 98 g et 102 g. Déterminer la probabilité qu'il ne soit pas conforme et arrondir le résultat au centième.

Un savon n'est pas conforme si sa masse est inférieure à 98 g ou supérieure à 102 g. La loi normale est symétrique autour de 100 g : les deux probabilités de dépassement sont égales. Donc $P(\text{non conforme}) = 2P(X \leq 98) \approx 2 \times 0,0227501 = 0,0455003$, soit $0,05$ au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un savon ne soit pas conforme est $0,05$ au centième.

Partie C : Deux défauts

Question 1.a. Les défauts de forme F et de masse M étant indépendants, calculer P(F ∩ M) et arrondir le résultat à 10^{-4} près.

Les événements F et M sont indépendants. La probabilité qu'un savon cumule les deux défauts est donc le produit de leurs probabilités :

$$P(F \cap M) = P(F)P(M) = 0,027 \times 0,046 = 0,001242.$$

À 10^{-4} près, cela donne $0,0012$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(F \cap M) = 0,0012$ à 10^{-4} près.

Question 1.b. Expliquer ce que représente la probabilité P(F ∩ M).

L'intersection $F \cap M$ désigne les savons pour lesquels les deux événements se réalisent simultanément. La probabilité calculée en 1.a représente donc la proportion de savons ayant à la fois un défaut de forme et un défaut de masse.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité qu'un savon présente simultanément les deux défauts.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un savon présente au moins un des deux défauts et arrondir le résultat à 10^{-4} près.

« Au moins un des deux défauts » correspond à l'union $F \cup M$. On additionne les probabilités de chaque défaut et on retranche leur intersection, comptée deux fois :

$$P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0,027 + 0,046 - 0,001242 = 0,071758.$$

À 10^{-4} près, le résultat est $0,0718$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité d'au moins un défaut est $0,0718$ à 10^{-4} près.

Question 3. Calculer la probabilité qu'un savon ne présente aucun défaut et arrondir le résultat à 10^{-4} près.

L'absence des deux défauts est l'événement complémentaire de leur union. On soustrait donc à 1 la probabilité d'avoir au moins un défaut :

$$P(\overline{F} \cap \overline{M}) = 1 - P(F \cup M) = 1 - 0,071758 = 0,928242.$$

À 10^{-4} près, la probabilité demandée est $0,9282$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un savon ne présente aucun défaut est $0,9282$ à 10^{-4} près.

2. Achat d’un appartement, assurance et location

Un couple étudie le financement d’un appartement, compare deux propositions d’assurance et envisage de le louer ultérieurement. Les questions portent sur un tableau d’amortissement, les suites arithmétiques et géométriques, les mensualités de crédit et l’ajustement affine de données de loyers.

Partie A : Achat d’un appartement

Question 1.a. Pour compléter le tableau d’amortissement d’un prêt de 140 000 € au taux mensuel de 0,12 %, donner les formules à saisir en C4, D4 et B5, recopiables vers le bas.

Les intérêts sont calculés sur le capital restant dû au taux fixe de C1. La mensualité moins les intérêts donne l’amortissement, qui est ensuite retranché du capital restant dû.

- C4 : `=B4*$C$1`
- D4 : `=E4-C4`
- B5 : `=B4-D4`

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> C4 : `=B4*$C$1` ; D4 : `=E4-C4` ; B5 : `=B4-D4`.

Question 1.b. Calculer les valeurs obtenues dans les cellules C4, D4 et B5 du tableau d’amortissement.

Le taux mensuel de 0,12 % vaut 0,0012 en écriture décimale. Les intérêts sont calculés sur les 140 000 € empruntés. L’amortissement est la mensualité diminuée des intérêts, puis il est retranché du capital initial pour obtenir le capital restant dû au mois suivant.

Cellule	Calcul	Valeur
C4	140 000 × 0,0012	168,00 €
D4	865,26 − 168	697,26 €
B5	140 000 − 697,26	139 302,74 €

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> C4 = 168,00 € ; D4 = 697,26 € ; B5 = 139 302,74 €.

Question 2. Calculer le coût total du crédit de 140 000 € remboursé par 180 mensualités constantes de 865,26 €.

Le coût du crédit est la somme des mensualités diminuée du capital emprunté. Les remboursements totalisent $180 \times 865,26 = 155\,746,80$ €. On retranche ensuite les 140 000 € empruntés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Coût total du crédit : 15 746,80 €.

Question 3. Pour un emprunt de 140 000 € au taux annuel de 1,35 %, montrer que le taux moyen mensuel équivalent, arrondi au millième, est de 0,112 %.

Le taux mensuel équivalent vérifie $(1+t)^{12} = 1,0135$. Ainsi, $t = 1,0135^{1/12} - 1 \approx 0,0011181$. En pourcentage, cela donne environ 0,11181 %, qui s'arrondit au millième à 0,112 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Taux mensuel équivalent : 0,112 %.

Question 4. À l'aide de la formule fournie pour une mensualité constante, déterminer si le couple peut souscrire l'emprunt de 140 000 € sur 12 ans au taux annuel de 1,35 %, sachant qu'il ne peut rembourser plus de 1 000 € par mois. Justifier la réponse.

La durée correspond à $12 \times 12 = 144$ mensualités. En utilisant le taux équivalent non arrondi $t = 1,0135^{1/12} - 1$, la formule donne $m = 140\,000 t / [1 - (1+t)^{-144}] \approx 1\,053,13$ €. La mensualité dépasse le plafond de 1 000 €.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la mensualité est d'environ 1 053,13 €, supérieure au plafond de 1 000 €.

Partie B : Assurance

Question 1.a. Pour la proposition A, dont le montant est de 200 € la première année puis augmente de 10 € par an, calculer a_2 puis a_3.

La proposition A augmente de 10 € chaque année. On ajoute cette somme au montant de l'année précédente pour obtenir les deux montants demandés.

1. $a_2 = 200 + 10 = 210$ €.
2. $a_3 = 210 + 10 = 220$ €.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_2 = 210$ € et $a_3 = 220$ €.

Question 1.b. Donner la nature de la suite (a_n) correspondant à la proposition A et préciser sa raison.

La cotisation augmente chaque année d'une somme constante de 10 €. La différence entre deux termes consécutifs est donc toujours 10 : $a_{n+1} - a_n = 10$. Par conséquent, (a_n) est une suite arithmétique de premier terme 200.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> (a_n) est arithmétique, de premier terme 200 et de raison 10 €.

Question 1.c. Donner, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n en fonction de n.

Dans une suite arithmétique, on ajoute au premier terme la raison multipliée par le nombre de rangs parcourus. Ici, le premier montant est 200 € et la raison vaut 10 €.

Pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = 200 + 10(n-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = 200 + 10(n-1)$, pour $n \geq 1$.

Question 2.a. Pour la proposition B, dont le montant est de 180 € la première année puis augmente de 6 % par an, calculer b_2 puis b_3.

Une hausse annuelle de 6 % correspond à une multiplication par 1,06. On applique ce coefficient au montant de l'année précédente pour obtenir chaque cotisation.

$b_2 = 180 \times 1,06 = 190,80$ € et $b_3 = 190,80 \times 1,06 = 202,248$ €, soit 202,25 € au centime.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $b_2 = 190,80$ € et $b_3 = 202,25$ €.

Question 2.b. Donner la nature de la suite (b_n) correspondant à la proposition B et préciser sa raison.

Chaque année, le montant est multiplié par le même coefficient, $1 + 0,06 = 1,06$. Le quotient de deux termes consécutifs est donc constant : (b_n) est une suite géométrique, de premier terme 180 et de raison 1,06.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> (b_n) est géométrique, de premier terme 180 et de raison 1,06.

Question 2.c. **Donner, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de b_n en fonction de n.**

Le terme de rang n d'une suite géométrique est le premier terme multiplié par la raison à la puissance $n-1$. Le montant initial est 180 € et la raison vaut 1,06.

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 180 \times 1,06^{n-1}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $b_n = 180 \times 1,06^{n-1}$, pour $n \geq 1$.

Question 3. **Déterminer quelle proposition est la plus avantageuse si le couple conserve son assurance pendant 10 ans, et justifier la réponse.**

Sur dix ans, la proposition A coûte $10 \times (200 + 290)/2 = 2\,450$ €. Pour B, la somme des dix cotisations géométriques est $180 \times (1 - 1,06^{10})/(1 - 1,06) \approx 2\,372,54$ €. La proposition B revient donc moins cher.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition B est la plus avantageuse : 2 372,54 €, contre 2 450 € pour A.

Partie C : Location

Question 1. **Pour les données des loyers mensuels de 2012 à 2017, donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i ; y_i), arrondi au millième, et expliquer pourquoi ce résultat permet d'envisager un ajustement affine.**

Le coefficient de corrélation des six couples est $r \approx 0,991$. Proche de 1, il traduit une forte corrélation linéaire positive. Le nuage de points est donc presque aligné, ce qui permet d'envisager un ajustement affine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r \approx 0,991$: la corrélation est forte et positive, un ajustement affine est pertinent.

Question 2. **Donner l'équation de la droite de régression de y en x sous la forme y = ax + b, avec a et b arrondis au centième.**

La pente vaut $a = 112,5/17,5 \approx 6,4286$. Avec $\bar{x} = 2,5$ et $\bar{y} = 623,8333$, l'ordonnée à l'origine vaut $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 607,7619$. On arrondit les deux coefficients au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 6,43x + 607,76$.

Question 3.a. **En utilisant l'ajustement y = 6,4x + 608, déterminer le montant du loyer mensuel que le couple peut espérer en 2020.**

Le rang 0 correspond à 2012 ; en 2020, le rang est donc $2020 - 2012 = 8$. Avec l'ajustement donné, $y = 6,4 \times 8 + 608 = 659,2$ € par mois.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Loyer mensuel estimé en 2020 : 659,20 €.

Question 3.b. **À partir de l'ajustement y = 6,4x + 608, déterminer en quelle année le couple peut espérer louer son appartement pour plus de 700 € par mois.**

On résout $6,4x + 608 > 700$, soit $x > 92/6,4 = 14,375$. Le premier rang entier convenable est 15. Comme le rang 0 désigne 2012, le rang 15 désigne 2027. Le modèle donne 697,60 € au rang 14 et 704 € au rang 15.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le couple peut espérer dépasser 700 € par mois en 2027.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2019)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Comptabilité et Gestion, session 2019, code CGMAT, d'une durée de 2 heures et de coefficient 3. L'exercice 1 étudie les défauts de savons à l'aide des probabilités et de la loi normale. L'exercice 2 porte sur le financement d'un appartement, les suites d'assurance et l'évolution statistique des loyers par ajustement affine.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour deux événements indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Pour une suite arithmétique, $u_n = u_1 + (n - 1)r$; pour une suite géométrique, $u_n = u_1 q^{n-1}$.
- Pour une loi normale centrée en μ, la probabilité d'être hors de [98 ; 102] se calcule en additionnant les deux probabilités de queue.
- Dans l'ajustement $y = ax + b$, le rang de l'année 2012 vaut 0 et augmente de 1 chaque année.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer $P(F|V)$ d'une probabilité d'intersection et utiliser les probabilités conditionnelles dans l'arbre.
- Pour un défaut de masse, additionner les probabilités des deux extrémités hors de l'intervalle conforme.
- Dans le tableau d'amortissement, calculer les intérêts sur le capital restant dû au début du mois.
- Pour les loyers, convertir correctement l'année en rang avant d'utiliser la droite d'ajustement.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la probabilité qu'un savon présente au moins un des deux défauts ?

On utilise $P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M)$. Comme les défauts sont indépendants, $P(F \cap M) = P(F)P(M)$. On peut aussi calculer le complément de l'événement « aucun défaut ».

Q : Comment reconnaître les suites des deux propositions d'assurance ?

Une augmentation fixe de 10 € définit une suite arithmétique de raison 10. Une hausse annuelle de 6 % multiplie chaque montant par 1,06 : la suite est géométrique de raison 1,06.

Q : Comment convertir une année en rang pour estimer le loyer ?

Le rang commence en 2012, avec $x = 0$. Pour une année donnée, soustrayez 2012 à l'année, puis remplacez x dans l'équation d'ajustement fournie afin d'estimer le loyer mensuel.

Q : Quels éléments de rédaction sont particulièrement attendus dans cette épreuve ?

Le sujet indique que la clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction comptent dans l'appréciation des copies. Respectez les arrondis demandés et présentez vos traces de recherche, notamment dans les parties où elles sont prises en compte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.