Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2019 • Code sujet : **MATGRD** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5 ou 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Croissance du staphylocoque doré : modèles exponentiel et logistique (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de la qualité de l'eau en bouteille (11 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 1-Sujet.pdf

1. Croissance du staphylocoque doré : modèles exponentiel et logistique

L'exercice étudie la prolifération de bactéries Staphylococcus aureus dans un échantillon de mix destiné à la fabrication de glaces, à partir de relevés horaires. Il compare un modèle exponentiel et un modèle logistique pour décrire la croissance bactérienne et sa vitesse.

Partie A : Équation différentielle

Question 1. Déterminer, sur l'intervalle [0 ; +∞[, les solutions de l'équation différentielle 20y′ − 20,8y = 0, où y est définie et dérivable sur cet intervalle.

En divisant l'équation par 20, on obtient $y' = 1{,}04y$. Une fonction exponentielle $y(t) = Ce^{kt}$ vérifie cette équation lorsque $k = 1{,}04$. Ainsi, toutes les solutions sur $[0;+[$ sont de cette forme, avec une constante réelle C.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{1{,}04t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. En déduire la fonction f solution de cette équation différentielle qui vérifie f(0) = 10.

La solution générale est $f(t) = Ce^{1{,}04t}$. En prenant $t = 0$, on obtient $f(0) = C$. La condition initiale impose donc $C = 10$, ce qui détermine la solution particulière demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 10e^{1{,}04t}$.

Partie B : Modèle exponentiel

Question 1. Compléter en annexe 1 le tableau des valeurs $z_i = \ln(N_i)$, à partir des effectifs de bactéries relevés chaque heure, en arrondissant au centième. Rendre l'annexe avec la copie.

Pour chaque effectif relevé, on applique $z_i = \ln(N_i)$, puis on arrondit au centième. Les neuf valeurs à inscrire dans la dernière ligne de l'annexe sont :

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	2,30	3,30	4,36	5,45	6,48	7,50	8,54	9,55	10,57

Annexe 1 complétée

Heure (t_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Quantité de SA (N_i)	10	27	78	232	650	1800	5100	14100	39000
$z_i = ln\,(N_i)$	2,30	3,30	4,36	5,45	6,48	7,50	8,54	9,55	10,57

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

z_i : 2,30 ; 3,30 ; 4,36 ; 5,45 ; 6,48 ; 7,50 ; 8,54 ; 9,55 ; 10,57.

Question 2. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points (t_i, z_i), sous la forme z = at + b, et arrondir a et b au millième.

On ajuste les points avec les z_i arrondis au centième comme demandé à la question précédente. Comme $\sum(t_i - 4)^2 = 60$, la pente vaut $62{,}24/60 \approx 1{,}037$. La moyenne des z_i vaut $58{,}05/9$, d'où une ordonnée à l'origine $58{,}05/9 - 4 \times (62{,}24/60) \approx 2{,}301$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Droite d'ajustement : $z = 1{,}037t + 2{,}301$.

Question 3. En utilisant la question précédente, déterminer une expression de la fonction N qui modélise le nombre de bactéries SA à l'instant t, exprimé en heures.

La droite d'ajustement donne $\ln(N) = 1{,}037t + 2{,}301$. En appliquant la fonction exponentielle aux deux membres, le modèle recherché est $N(t) = e^{1{,}037t + 2{,}301}$. On peut aussi séparer les facteurs pour obtenir une expression exponentielle équivalente.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$N(t) = e^{1{,}037t+2{,}301} \approx 9{,}984e^{1{,}037t}$.

Question 4. À l'aide du modèle N(t) = 10e^(1,04t), estimer en minutes le temps de génération bactérienne, c'est-à-dire la durée nécessaire au doublement de l'effectif.

Le doublement est atteint lorsque $N(G) = 20$, soit $10e^{1{,}04G} = 20$. Ainsi, $e^{1{,}04G} = 2$, puis $G = \ln(2)/1{,}04$ heure. La conversion en minutes consiste à multiplier cette durée par 60.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Le temps de génération est d'environ 40 minutes.

Question 5. **Calculer la limite de la fonction N lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $1{,}04t$ tend vers $+\infty$. L'exponentielle $e^{1{,}04t}$ tend donc vers $+\infty$, et sa multiplication par 10 ne change pas cette limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = +\infty$.

Partie C : Modèle logistique

Question 1. **À partir de l'expression fournie de M′, étudier les variations de la fonction M sur l'intervalle [0 ; +∞[.**

Dans l'expression fournie, le numérateur de $M'(t)$ est strictement positif pour tout $t \geq 0$, et le dénominateur est un carré strictement positif. Donc $M'(t) > 0$ sur l'intervalle étudié. La fonction est strictement croissante, part de $M(0) = \frac{13500}{1351}$ et tend vers 13 500.

t	**0**	$+\infty$
$M'(t)$	+	+
$M(t)$	$\frac{13500}{1351}$	↗ 13500

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> M est strictement croissante sur $[0;+[$, de $\frac{13500}{1351}$ vers 13 500.

Question 2.a. **Déterminer la limite de M lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-1{,}04t} \to 0$. Le dénominateur $1350e^{-1{,}04t} + 1$ tend alors vers 1, tandis que le numérateur reste égal à 13 500.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t) = 13\,500$.

Question 2.b. **Parmi les modèles exponentiel et logistique, indiquer lequel est le plus vraisemblable pour décrire la croissance des bactéries SA.**

Le modèle exponentiel prévoit une croissance qui se poursuit sans limite. Le modèle logistique prévoit au contraire un effectif qui se stabilise autour d'une valeur limite. Cette stabilisation est plus vraisemblable pour une population bactérienne, dont les ressources disponibles sont limitées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le modèle logistique est le plus vraisemblable.

Question 3. À partir de la courbe représentative de M, déterminer le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries SA dépasse 10 000, puis arrondir le résultat à l'heure.

La lecture de la courbe place le franchissement de 10 000 près de 8 heures. Pour vérifier, résoudre $M(t) > 10000$ revient à obtenir $1350e^{-1{,}04t} < 0{,}35$, donc $t > \frac{\ln(1350/0{,}35)}{1{,}04} \approx 7{,}94$. L'arrondi à l'heure est 8.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le nombre de bactéries dépasse 10 000 après environ 8 heures.

Question 4. Choisir, parmi 4 h, 7 h, 9 h et 16 h, l'instant auquel la vitesse de prolifération M′ est maximale, puis expliquer le choix.

La vitesse $M'(t)$ est maximale au point d'inflexion de la courbe logistique, lorsque l'effectif atteint la moitié de sa limite, soit 6750. En remplaçant dans l'expression de M, on obtient $1350e^{-1{,}04t} = 1$, donc $t = \frac{\ln(1350)}{1{,}04} \approx 6{,}93$ heures.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La vitesse est maximale vers 7 h, réponse b.

2. Contrôle de la qualité de l'eau en bouteille

L'exercice porte sur les résultats d'analyses de bouteilles d'eau minérale naturelle et d'eau de source, puis sur le taux de nitrate d'une production d'eau minérale. Il mobilise les probabilités conditionnelles, les statistiques descriptives, un test bilatéral et la loi binomiale.

Partie A : Eau de source et eau minérale naturelle

Question 1). À partir des effectifs de bouteilles analysées, calculer les probabilités P(M) et P(S), où M désigne une analyse d'eau minérale naturelle et S une analyse d'eau de source.

Événement	Calcul	Probabilité
M	37 000 / 126 000	0,2937
S	89 000 / 126 000	0,7063

Les deux types d'eau couvrent les 126 000 analyses. On divise donc chaque effectif par le nombre total d'analyses, puis on arrondit les probabilités au dix-millième, comme demandé dans l'énoncé.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $P(M) = 0,2937$ et $P(S) = 0,7063$, aux arrondis demandés.

Question 2). Calculer la probabilité qu'une analyse choisie au hasard révèle une eau non conforme.

On applique la formule des probabilités totales en distinguant les deux types d'eau. Les probabilités conditionnelles de non-conformité sont $0,12\% = 0,0012$ pour l'eau minérale et $0,08\% = 0,0008$ pour l'eau de source.

$$P(N) = \frac{37\,000}{126\,000} \times 0,0012 + \frac{89\,000}{126\,000} \times 0,0008 = 0,00091746\ldots$$

Arrondie au dix-millième, cette probabilité vaut 0,0009.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> La probabilité qu'une analyse révèle une eau non conforme est $P(N) = 0,0009$, au dix-millième.

Question 3). Calculer la probabilité qu'une analyse porte sur une bouteille d'eau minérale naturelle sachant qu'elle révèle une eau non conforme.

1. La probabilité qu'une analyse porte sur une eau minérale et révèle une non-conformité est $P(M \cap N) = \frac{37\,000}{126\,000} \times 0,0012 = 0,00035238\ldots$.
2. On divise cette probabilité par $P(N) = 0,00091746\ldots$, d'après la question précédente.

Cette probabilité conditionnelle représente la part des analyses non conformes provenant de bouteilles d'eau minérale. Le quotient s'arrondit au dix-millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Parmi les analyses non conformes, la probabilité qu'il s'agisse d'eau minérale est $P(M \mid N) = 0,3841$.

Partie B : Étude du nitrate présent dans l'eau

Question 1). En assimilant les valeurs observées aux centres de leurs classes, déterminer à la calculatrice la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type s' de l'échantillon, à 10^{-4} près.

Centre de classe (mg/L)	Effectif
4,25	5
4,35	57
4,45	181
4,55	233
4,65	110
4,75	14

La moyenne est pondérée par les effectifs : $\bar{x} = \frac{4{,}25\times5+\cdots+4{,}75\times14}{600} = 4,521333\ldots$. L'écart type descriptif calculé avec le diviseur 600 est $s' = 0,097527\ldots$ mg/L. Les résultats sont arrondis à quatre décimales.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\bar{x} = 4,5213$ mg/L et $s' = 0,0975$ mg/L, à 10^{-4} près.

Question 2). Vérifier que s = 0,0976 est un estimateur de l'écart type σ du taux de nitrate de la production.

L'écart type de l'échantillon, calculé à la question précédente, utilise le diviseur 600. Pour obtenir l'estimation corrigée de l'écart type de la production, on applique le facteur $\sqrt{\frac{600}{599}}$.

$$s = s'\sqrt{\frac{600}{599}} = 0,097608\ldots \text{ mg/L}.$$

Le calcul avec les valeurs non arrondies donne 0,0976 mg/L à quatre décimales : la valeur proposée est vérifiée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La correction d'échantillon donne $s = 0,0976$ mg/L à quatre décimales : la valeur proposée est vérifiée.

Question 3.a). Parmi les trois densités représentées en annexe 2, identifier celle qui correspond à la variable aléatoire $\bar{X}$ sous l'hypothèse H_0 et justifier la réponse.

Sous H_0, $\bar{X}$ suit une loi normale d'espérance 4,5 et d'écart type 0,004. Sa densité doit donc être centrée en 4,5 et très resserrée autour de cette valeur. Sur l'annexe, la densité n°2 possède ces deux caractéristiques : son sommet est en 4,5 et sa largeur est la plus faible.

La densité n°1 est trop étalée. La densité n°3 est resserrée, mais centrée autour de 4,48, et ne convient donc pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La densité correspondant à $\bar{X}$ sous H_0 est la densité n°2, centrée en 4,5 et très resserrée.

Question 3.b). Déterminer à 10^{-3} près un nombre réel a tel que $P(4{,}5 - a \leq \bar{X} \leq 4{,}5 + a)$ soit approximativement égal à 0,95.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs sont comprises entre la moyenne moins 1,96 écart type et la moyenne plus 1,96 écart type. Ici, l'écart type de $\bar{X}$ est 0,004.

$$a = 1{,}96 \times 0{,}004 = 0{,}00784.$$

À 10^{-3} près, on obtient $a = 0{,}008$ mg/L.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre recherché, arrondi au millième, est $a = 0{,}008$ mg/L.

Question 3.c). Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de 5 % portant sur $H_0 : \mu = 4{,}5$ contre $H_1 : \mu \neq 4{,}5$.

Le test bilatéral au seuil de 5 % conserve l'intervalle central de probabilité environ 0,95. Avec $a = 0{,}008$, ses bornes sont $4{,}5 - 0{,}008 = 4{,}492$ et $4{,}5 + 0{,}008 = 4{,}508$ mg/L.

- Si la moyenne observée appartient à $[4{,}492\ ;\ 4{,}508]$, on ne rejette pas H_0.
- Si elle est à l'extérieur de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $\bar{x} \in [4{,}492\ ;\ 4{,}508]$ mg/L ; sinon, rejeter H_0 au seuil de 5 %.

Question 3.d). D'après les résultats obtenus dans l'échantillon donné, déterminer si l'hypothèse $\mu = 4{,}5$ peut être acceptée.

La moyenne observée est $\bar{x} = 4{,}5213$ mg/L, tandis que la borne supérieure de l'intervalle de non-rejet est 4,508 mg/L. La moyenne observée se trouve donc au-delà de cet intervalle. Selon la règle du test bilatéral au seuil de 5 %, les résultats de l'échantillon conduisent à rejeter l'hypothèse $\mu = 4{,}5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 : l'échantillon ne permet pas d'accepter $\mu = 4,5$ mg/L au seuil de 5 %.

Partie C : Distribution

Question 1). À partir du graphique de la loi binomiale, vérifier si la probabilité qu'un lot de 540 bouteilles contienne moins de 520 bouteilles de très bonne qualité est environ égale à 0,005, et justifier la réponse.

« Moins de 520 » correspond à l'événement $Y \leq 519$. Il faut additionner les probabilités des barres situées strictement à gauche de 520 sur le graphique. Leur somme est de l'ordre de 0,01, et non de 0,005. La lecture reste approximative, mais elle suffit pour conclure que l'estimation du biologiste est trop faible.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la somme graphique pour $Y < 520$ est proche de 0,01, et non de 0,005.

Question 2). Sachant que le nombre moyen de bouteilles de très bonne qualité parmi les lots de 540 est 528, déterminer les paramètres n et p de la loi binomiale suivie par Y, en arrondissant p à 10^{-3}.

La taille de chaque lot donne directement le paramètre $n = 540$. Pour une loi binomiale, l'espérance vaut np. Le nombre moyen étant 528, on résout $540p = 528$, d'où $p = \frac{528}{540} = 0,977777\ldots$. La probabilité est arrondie au millième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les paramètres sont $n = 540$ et $p = 0,978$; ainsi, $Y \sim \mathcal{B}(540\ ;\ 0,978)$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2019)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement D, session 2019, code MATGRD, d'une durée de 2 heures. Le coefficient varie selon la spécialité : 1, 1,5 ou 2. Deux exercices de 10 points portent sur la croissance bactérienne dans un mix et la qualité de l'eau en bouteille, avec modèles exponentiel et logistique, probabilités, statistiques, test d'hypothèse et loi binomiale.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' = ky$, les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{(kt)}$; la condition initiale détermine la constante C.
- La transformation $z = \ln(N)$ permet d'ajuster linéairement un modèle exponentiel, puis $N(t) = e^{(at+b)}$.
- Pour une loi binomiale Y de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(Y) = np$.
- Pour un test bilatéral normal au seuil de 5 %, la région centrale d'acceptation couvre environ 95 % des valeurs.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les arrondis demandés : centième, millième, 10^{-4} ou 10^{-3} selon la question.
- En probabilité conditionnelle, distinguer la probabilité conjointe de la probabilité conditionnelle demandée.
- Pour le test, comparer la moyenne observée aux bornes de la région d'acceptation définie au seuil de 5 %.
- Lire les axes et les échelles des graphiques avant d'en déduire une valeur ou une probabilité.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment retrouver un modèle exponentiel à partir d'un tableau d'effectifs ?

On calcule d'abord $z_i = \ln(N_i)$, puis on ajuste les points (t_i, z_i) par une droite $z = at + b$. On revient aux effectifs avec $N(t) = e^{(at+b)}$.

Q : Comment décider si un modèle logistique est plus plausible qu'un modèle exponentiel ?

On compare leur comportement à long terme avec le contexte. Un modèle logistique tend vers une limite, qui représente un effectif plafonné, tandis qu'un modèle exponentiel croît sans borne.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre eux, traitez les questions indépendantes et réservez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Qu'attend le jury pour une question de test statistique ?

Il faut préciser les hypothèses et le seuil, établir la région d'acceptation, comparer la moyenne observée à cette région, puis conclure par rapport à l'affirmation étudiée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2019/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2019 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.