Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2018/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d’un train à très haute vitesse et calcul d’aire

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse de 400 km/h en moins de deux minutes, et la distance parcourue est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L’exercice étudie cette fonction et la vitesse du wagon, puis utilise une représentation graphique et une intégrale pour calculer l’aire d’une pièce destinée à une gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

L’équation s’écrit sous la forme fournie avec $a = -0,2$. La solution générale est donc $y(t) = ke^{-at}$. La constante k est réelle et la solution est définie sur tout l’intervalle $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On a $g'(t) = -15$. En substituant g dans le membre de gauche de l’équation :

$$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t.$$

Ce résultat est bien égal au membre de droite. La fonction g vérifie donc l’équation différentielle sur son domaine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution de $y' - 0,2y = 3t$.

Question 3°. Déduire des résultats précédents l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l’équation différentielle complète s’obtiennent en ajoutant à une solution particulière toutes les solutions de l’équation homogène. La solution particulière donnée est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $ke^{0,2t}$. La constante réelle k décrit ainsi l’ensemble des solutions sur $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l’équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0, sachant qu’au temps t = 0 le wagon est au point de départ.

La solution générale est $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. À $t = 0$, la condition initiale impose $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant cette constante, on obtient la fonction distance recherchée, qui vérifie bien que le wagon est au point de départ à l’instant initial.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t.$

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). Résoudre sur l'intervalle [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0 à partir des expressions de f et de f' fournies par le logiciel de calcul formel.

D'après le calcul formel, $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, puis à $0,2t \geq 0$, puisque l'exponentielle est croissante. Cette condition est vérifiée sur tout l'intervalle $[0, 3]$, avec égalité uniquement en $t = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec égalité en $t = 0$.

Question 1° b). Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

La dérivée est positive sur $[0, 3]$ et strictement positive pour $t > 0$. La fonction f est donc croissante sur cet intervalle. Ses valeurs aux bornes sont $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$.

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	0	+
Variation de f	0	$16,659$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante de 0 à environ $16,659$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue au bout d'une minute est $f(1)$. En utilisant la fonction donnée, $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. L'arrondi au dixième demandé conserve donc une décimale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le wagon a parcouru $1,6$ km au bout d'une minute.

Question 3° a). Sachant que la vitesse du wagon en kilomètres par minute à l'instant t correspond à f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse à l'instant t est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en km/min. À deux minutes, $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$ km/min. L'arrondi au dixième donne la vitesse demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La vitesse à $t = 2$ min est $7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse en comparant la vitesse obtenue à l'objectif fixé de 400 km/h en moins de deux minutes.

La vitesse $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$ est strictement croissante. À deux minutes, elle vaut environ $7,377$ km/min, soit $442,642$ km/h, ce qui dépasse 400 km/h. Comme la vitesse augmente continûment depuis 0, elle atteint cette cible avant deux minutes.

La conversion de la cible donne $400/60 \approx 6,667$ km/min.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint avant deux minutes : la vitesse dépasse 400 km/h avant $t = 2$ min.

Question 4°. Parmi les trois expressions proposées, recopier sans justification l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. La réponse exacte rapporte un point.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(t-2) + f(2)$. En remplaçant par les expressions de $f'(2)$ et $f(2)$, puis en réduisant, on obtient l'expression proposée dans la troisième réponse.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$

C. Calcul intégral

Question 1°. À partir du schéma et des dimensions représentées, choisir l'aire A1 du rectangle OPQR parmi les trois propositions, en unités d'aire.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ a une largeur de 3 unités et une hauteur de $2,25$ unités, puisque son bord supérieur est la droite $y = 2,25$. Son aire est donc le produit de ces deux dimensions.

Dimension	Valeur
Largeur	3
Hauteur	2,25
Aire	$3 \times 2,25$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ unités d'aire.

Question 2°. À l'aide de la primitive de g fournie par le logiciel de calcul formel, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire recherchée est son intégrale sur cet intervalle. Avec la primitive fournie :

$$A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3 = \frac{27}{4}\ln\left(\frac{18}{9}\right) = \frac{27}{4}\ln 2.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A hachurée de la pièce, en tenant compte de la symétrie indiquée, et arrondir le résultat au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, son aire totale est le double :

$$A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ unités d'aire, soit $4,143\ \text{m}^2$.

2. Probabilités et test d’hypothèse sur l’obsolescence programmée

L’exercice étudie les obsolescences technique et logicielle dans une population de smartphones, puis la proportion d’appareils non réparables dans des lots prélevés au service après-vente. Il se termine par un test bilatéral qui vérifie une proportion annoncée dans un sondage sur la marque B à partir d’une enquête auprès de 180 personnes.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les deux types d’obsolescence, compléter le tableau d’effectifs croisant les smartphones touchés ou non par l’obsolescence technique et logicielle dans la population de 200 appareils.

Sur 200 smartphones, 6 sont touchés techniquement et 16 logiciellement. Parmi les 16 touchés logiciellement, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2 appareils. Les autres effectifs se déduisent des totaux.

Smartphones	Touchés par l’obsolescence logicielle	Non touchés par l’obsolescence logicielle	Total
Touchés par l’obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l’obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d’effectifs complété

Smartphones	touchés par l’obsolescence logicielle	non touchés par l’obsolescence logicielle	Total
touchés par l’obsolescence technique	**2**	**4**	**6**
non touchés par l’obsolescence technique	**14**	**180**	**194**
Total	**16**	**184**	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs des quatre cases centrales : 2, 4, 14 et 180.

Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l’événement « le smartphone est touché par l’obsolescence technique », L l’événement « le smartphone est touché par l’obsolescence logicielle », et P_L(T) la probabilité de T sachant L.

Les pourcentages de l’énoncé donnent les probabilités des événements dans la population entière. La probabilité conditionnelle est celle donnée pour les smartphones touchés logiciellement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché par les deux types d'obsolescence.

Par la formule des probabilités conditionnelles, **$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$**. Ainsi, 8 % des appareils sont touchés logiciellement, et 12,5 % de ceux-ci sont également touchés techniquement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0{,}01$.

Question 3° b). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

On additionne les probabilités de T et de L, puis on retranche leur intersection, comptée deux fois dans cette somme :

$$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}10$.

Question 3° c). À l'aide des questions précédentes, calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

Par définition, la probabilité cherchée est le rapport de la probabilité de l'intersection à celle de T.

$$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0{,}01}{0{,}03}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = 1/3 \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui associe à chaque lot de 50 smartphones le nombre d'appareils non réparables, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Les 50 prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise : ils sont indépendants et la probabilité qu'un appareil soit non réparable reste 0,045. X compte le nombre de succès « non réparable » parmi ces 50 tirages. Il suit donc une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale $B(50 ; 0{,}045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous les appareils soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque X = 0. La probabilité qu'un appareil soit réparable vaut 1 − 0,045 = 0,955. L'indépendance des prélèvements donne :

$$P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

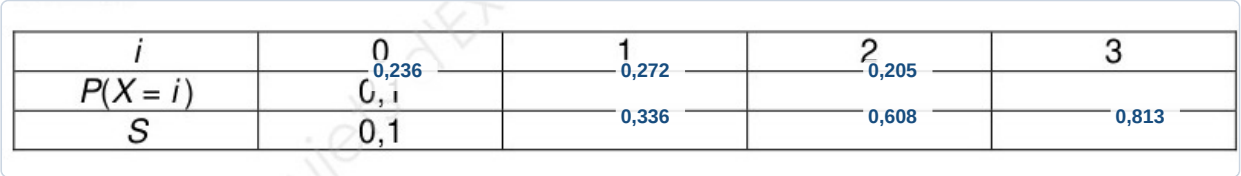
P(X = 0) ≈ 0,100.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme donné, puis compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S pour i allant de 0 à 3.

On calcule chaque probabilité avec la loi binomiale de paramètres 50 et 0,045. L'algorithme ajoute chaque terme à la somme précédente ; les valeurs affichées sont arrondies au millième.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau de l'algorithme complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeur finale affichée : S = 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte des lots de smartphones.

La somme finale additionne les probabilités des cas où le lot contient 0, 1, 2 ou 3 appareils non réparables. Elle correspond donc à la probabilité d'avoir au plus trois appareils non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois appareils non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables par lot.

Pour une loi binomiale, l'espérance vaut n × p. Ici :

$$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25.$$

Ce résultat représente le nombre moyen d'appareils non réparables par lot, sur un grand nombre de lots.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 2,25 appareil non réparable par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir la valeur de h arrondie au centième telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Les choix proposés sont 0,05, 0,06 et 0,07. La réponse exacte rapporte un point.

Pour une loi normale, l'intervalle central de 95 % s'étend à environ 1,96 écart type de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit 0,07 au centième parmi les choix proposés.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Au seuil de 5 %, on utilise l'intervalle d'acceptation centré en 0,55 et de demi-largeur h = 0,07.

- Si la fréquence observée appartient à [0,48 ; 0,62], on ne rejette pas H_0.
- Si elle est en dehors de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 pour une fréquence comprise entre 0,48 et 0,62 ; la rejeter sinon.

Question 3°. Sur les 180 personnes interrogées, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Donner la conclusion du test.

La fréquence observée est $76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle d'acceptation : elle appartient donc à la zone de rejet.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : la proportion observée diffère de 0,55.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures ; son coefficient dépend de la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10, abordent la modélisation d'un train par équation différentielle, l'étude de fonction et le calcul intégral, puis les probabilités, la loi binomiale et un test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 3t, les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- La dérivée de la distance par rapport au temps donne la vitesse ; harmoniser les unités avant toute comparaison.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Pour un test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de l'intervalle de décision associé au seuil choisi.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter l'intervalle étudié et utiliser le signe de la dérivée pour établir les variations.
- Convertir les vitesses dans la même unité avant de vérifier l'objectif des ingénieurs.
- Dans un tableau croisé, vérifier les effectifs totaux et distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T).
- Pour le test, comparer la fréquence observée à l'intervalle de décision et conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment interpréter la dérivée dans l'exercice sur le train ?

La fonction f donne la distance en kilomètres en fonction du temps en minutes. Sa dérivée f' représente donc la vitesse en kilomètres par minute. Pour comparer cette vitesse à 400 km/h, convertissez les unités afin de les rendre cohérentes.

Q : Comment reconnaître une loi binomiale dans le problème des smartphones ?

X compte les appareils non réparables dans 50 prélèvements assimilés à des tirages avec remise. Chaque tirage a deux issues, une probabilité constante de 0,045 et les tirages sont indépendants. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,045.

Q : Combien de temps et de points sont prévus pour l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures. Elle comprend deux exercices valant chacun 10 points, et les parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Le coefficient varie selon la spécialité de BTS, comme l'indique le tableau du sujet.

Q : Comment rédiger la conclusion du test d'hypothèse ?

Comparez la fréquence observée à l'intervalle de décision établi au seuil de 5 %. Indiquez si H0 est rejetée ou non, puis formulez la conclusion sur la proportion annoncée pour la marque B, sans présenter cette décision comme une certitude absolue.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2018/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.