Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRC1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 ou 3 selon la spécialité**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Production éolienne : ajustement statistique et puissance d'une éolienne** (8 questions) **Page 3**

2. **Probabilités, loi normale et test d'hypothèse en maintenance éolienne** (12 questions) **Page 6**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2018/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 2-Sujet.pdf

1. Production éolienne : ajustement statistique et puissance d'une éolienne

L'exercice étudie l'évolution de la puissance du parc éolien français de 2010 à 2016 et la possibilité d'atteindre l'objectif de 25 000 MW en 2020, à partir d'un ajustement affine. Il modélise aussi la vitesse en bout de pale et la puissance d'une éolienne d'un parc breton en fonction de la vitesse du vent.

Modèle statistique

Question Partie 1. À partir du tableau des puissances de 2010 à 2016 et de la droite d'ajustement affine représentée, étudier si, en admettant que la progression se confirme, l'objectif de 25 000 MW pour 2020 peut être atteint.

La droite du graphique a pour équation $y = 866{,}14x + 4914{,}4$, avec le rang $x = 1$ pour 2010. L'année 2020 correspond donc au rang $x = 11$. En extrapolant cet ajustement, on obtient $y = 866{,}14 \times 11 + 4914{,}4 = 14\,441{,}94$ MW. Cette estimation reste nettement inférieure à l'objectif fixé. Si la progression observée se poursuit selon cette droite, la puissance visée de 25 000 MW ne sera donc pas atteinte en 2020.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Prévision en 2020 : environ 14 442 MW. L'objectif de 25 000 MW ne serait pas atteint.

Partie 2 : Modélisation de la puissance d'une éolienne

Question 1. À plein régime, les pales effectuent 16 tours par minute. Déterminer la vitesse, en km/h, à l'extrémité des pales.

Le diamètre du rotor est de 100 m, donc son rayon est de 50 m. À chaque tour, l'extrémité d'une pale parcourt une circonférence de $2\pi \times 50 = 100\pi$ mètres. À 16 tours par minute, la distance parcourue en une minute vaut 1600π mètres. Pour obtenir des kilomètres par heure, on multiplie par 60 puis on divise par 1 000 : $1600\pi \times 60/1000 = 96\pi$ km/h.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La vitesse en bout de pale est $96\pi \approx 301{,}6$ km/h.

Question 2.a. À l'aide du modèle de puissance P(v) fourni, calculer la puissance attendue d'une éolienne lorsque la vitesse du vent est de 3 m/s.

La puissance est donnée en kilowatts. On remplace donc la vitesse du vent par $v = 3$ dans le modèle :

$$P(3) = -55 + \frac{5110}{2 + 750e^{-0{,}75\times 3}}.$$

Le dénominateur est positif et le calcul donne environ $8{,}05$ kW. Cette valeur correspond à la puissance attendue au moment où le vent atteint la vitesse de démarrage des pales indiquée dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour un vent de 3 m/s, la puissance attendue est d'environ 8,05 kW.

Question 2.b. Étudier les variations de la fonction P sur l'intervalle [3 ; +∞[.

En posant $f(v) = 1/(2 + 750e^{-0{,}75v})$, la dérivée fournie dans le sujet donne $P'(v) = 5110 f'(v)$. Ainsi,

$$P'(v) = \frac{2874375 e^{-0{,}75v}}{(2 + 750e^{-0{,}75v})^2}.$$

Pour tout $v \geq 3$, cette dérivée est strictement positive. Enfin, lorsque v tend vers $+\infty$, l'exponentielle tend vers zéro et $P(v)$ tend vers $-55 + 5110/2 = 2500$.

v	**3**	$+\infty$
Signe de $P'(v)$	$+$	
Variation de P	$P(3) \approx 8{,}05$	$\nearrow 2500$

✓ RÉPONSE À RETENIR

P est strictement croissante sur $[3; +\infty[$ et tend vers 2 500 kW.

Question 2.c. Sachant que la vitesse de coupure du vent du parc est de 20 m/s, calculer la puissance d'une éolienne lorsque le vent atteint cette vitesse.

La vitesse de coupure est de 20 m/s. On évalue donc le modèle en remplaçant v par 20 :

$$P(20) = -55 + \frac{5110}{2 + 750e^{-0{,}75 \times 20}}.$$

Le résultat est proche de 2 500 kW, limite vers laquelle tend la fonction lorsque la vitesse augmente. La remarque du sujet précise que l'éolienne est arrêtée à la vitesse de coupure ; la valeur calculée ici est celle que fournit le modèle à cette vitesse, avant la mise à l'arrêt.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À 20 m/s, le modèle donne une puissance d'environ 2 499,7 kW.

Question 2.d. Déterminer, à l'unité près et en m/s, la vitesse du vent à partir de laquelle la puissance d'une éolienne du parc est supérieure à 2 000 kW.

On cherche à résoudre $P(v) > 2000$. Comme le dénominateur est positif, cette inégalité équivaut à $2 + 750e^{-0{,}75v} < 5110/2055$, puis à

$$v > \frac{-\ln\left((5110/2055 - 2)/750\right)}{0{,}75} \approx 9{,}79.$$

La puissance dépasse donc 2 000 kW pour les vitesses supérieures à environ 9,79 m/s. Arrondie à l'unité près, cette vitesse seuil est de 10 m/s.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À l'unité près, la puissance dépasse 2 000 kW à partir de 10 m/s.

Question 3.a. **Déterminer la puissance moyenne d'une éolienne lorsque la vitesse du vent varie entre 5 m/s et 12 m/s, en utilisant la formule de valeur moyenne rappelée dans le sujet.**

La valeur moyenne sur $[5;12]$ est l'intégrale de la puissance divisée par la longueur de l'intervalle, soit $12-5=7$. Le logiciel fournit $\int_5^{12} P(v)\,dv = 9872{,}14872056$. On obtient donc

$$P_{\text{moy}} = \frac{9872{,}14872056}{7} \approx 1410{,}31 \text{ kW}.$$

Cette puissance moyenne correspond à environ $1{,}410$ MW pour une éolienne sur l'intervalle de vitesses considéré.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Puissance moyenne : environ 1 410,31 kW, soit 1,410 MW par éolienne.

Question 3.b. **Estimer le nombre d'éoliennes de ce type nécessaire pour atteindre une production totale de 1 000 MW.**

On utilise la puissance moyenne calculée précédemment, soit environ $1410{,}31$ kW par éolienne. Pour la comparer à la production totale demandée, on la convertit en mégawatts : $1410{,}31/1000 \approx 1{,}41031$ MW.

1. Le quotient $1000/1{,}41031$ est environ égal à $709{,}1$.
2. Il faut arrondir au nombre entier supérieur, car 709 éoliennes ne suffisent pas à atteindre 1 000 MW.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Il faut environ 710 éoliennes pour atteindre une production totale de 1 000 MW.

2. Probabilités, loi normale et test d'hypothèse en maintenance éolienne

L'exercice porte d'abord sur les inspections des pales d'un parc éolien et le nombre de pales nécessitant une intervention spécialisée. Il étudie ensuite le contrôle des diamètres de pièces pour frein mécanique à l'aide d'une loi normale et d'un test bilatéral sur la moyenne d'échantillons.

Partie 1 : Loi binomiale

Question 1. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les pales nécessitant une intervention de spécialistes parmi les 210 pales inspectées, suit une loi binomiale B(210 ; 0,018).

Le parc comporte $70 \times 3 = 210$ pales. Pour chaque pale, la probabilité de nécessiter une intervention est $1 - 0{,}982 = 0{,}018$. Les dommages étant indépendants, les 210 inspections sont des épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité de succès. Ainsi, X, qui compte les pales nécessitant une intervention, suit une loi binomiale de paramètres 210 et 0,018.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(210\,;\,0{,}018)$.

Question 2. Calculer la probabilité qu'aucune pale ne nécessite une intervention de spécialistes.

Pour qu'aucune pale ne nécessite d'intervention, chacune des 210 pales doit être non défaillante. Par indépendance, on multiplie 210 fois la probabilité $0{,}982$ de ne pas nécessiter d'intervention : $P(X = 0) = 0{,}982^{210}$. On arrondit le résultat à 10^{-4} près, conformément à la consigne de l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) \approx 0{,}0221$.

Question 3. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux pales défaillantes.

« Au plus deux » signifie que X vaut 0, 1 ou 2. Avec la loi binomiale, on additionne les probabilités de ces trois cas :

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{210}{k} (0{,}018)^k (0{,}982)^{210-k}.$$

La somme est arrondie à 10^{-4} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X \leq 2) \approx 0{,}2695$.

Question 4. Calculer le nombre moyen de pales nécessitant une intervention.

L'espérance d'une variable suivant une loi binomiale de paramètres n et p est np. Ici, un succès correspond à une pale nécessitant une intervention, avec $n = 210$ et $p = 0{,}018$. Le produit donne le nombre moyen de pales nécessitant une intervention lors de l'inspection du parc.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 3{,}78$ pales en moyenne.

Question 5.a. Montrer que les conditions de l'exercice permettent d'envisager l'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson, puis déterminer le paramètre λ correspondant.

Condition	Vérification
Effectif	$210 > 30$
Produit $np(1-p)$	$210 \times 0{,}018 \times 0{,}982 = 3{,}71196 \leq 10$
Paramètre	$\lambda = np = 210 \times 0{,}018 = 3{,}78$

Les deux conditions de l'énoncé sont satisfaites : l'approximation par une loi de Poisson est envisageable.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Approximation possible avec $\lambda = 3{,}78$.

Question 5.b. Pour une variable aléatoire Z suivant la loi de Poisson de paramètre λ, calculer P(Z ≤ 2), puis indiquer si le résultat est cohérent avec ce qui précède.

Pour Z suivant une loi de Poisson de paramètre $3{,}78$, on additionne les probabilités des valeurs 0, 1 et 2 :

$$P(Z \leq 2) = e^{-3{,}78}\left(1 + 3{,}78 + \frac{3{,}78 \times 3{,}78}{2}\right) \approx 0{,}2721.$$

Cette valeur est proche de la probabilité binomiale calculée à la question précédente : les résultats sont cohérents.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Z \leq 2) \approx 0{,}2721$, résultat cohérent avec le calcul binomial.

Loi normale

Question Partie 2. Le diamètre des pièces suit une loi normale d'espérance 22 mm et d'écart type 0,025 mm. Une pièce est acceptée si son diamètre appartient à [21,94 ; 22,06]. Calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production soit refusée.

Une pièce est refusée si son diamètre est inférieur à $21{,}94$ mm ou supérieur à $22{,}06$ mm. Ces limites sont à $0{,}06$ mm de la moyenne, soit $0{,}06/0{,}025 = 2{,}4$ écarts types. Par symétrie de la loi normale, la probabilité de refus est $2[1 - \Phi(2{,}4)]$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité de refus : $0{,}0164$, soit environ $1{,}64\%$.

Partie 3 : Test d'hypothèse

Question 1. Pour le test bilatéral au seuil de 5 % dont l'hypothèse nulle est H_0 : m = 22, donner l'hypothèse alternative H_1.

Le test est bilatéral : il cherche à détecter une moyenne différente de 22 mm, qu'elle soit inférieure ou supérieure à cette valeur. L'hypothèse alternative est donc la négation de l'hypothèse nulle $H_0 : m = 22$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $H_1 : m \neq 22$.

Question 2. Sous l'hypothèse nulle, choisir parmi les trois propositions la valeur approchée de h telle que P(22 − h < Ȳ < 22 + h) = 0,95. Une seule réponse est correcte et aucune justification n'est demandée.

Sous H_0, l'écart type de la moyenne d'échantillon est $\sigma_0 = 0{,}025/10 = 0{,}0025$ mm. L'intervalle central de 95 % d'une loi normale est délimité à environ $1{,}96$ écarts types de la moyenne. Donc $h \approx 1{,}96 \times 0{,}0025 = 0{,}0049$ mm : c'est la proposition à choisir.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}0049$ mm.

Question 3. Énoncer la règle de décision du test bilatéral.

Au seuil de 5 %, on compare la moyenne observée à l'intervalle central de 95 % sous H_0. Avec $h = 0{,}0049$, les bornes sont $22 - h$ et $22 + h$. Une moyenne située dans cet intervalle conduit à ne pas rejeter H_0 ; une moyenne située à l'extérieur conduit à la rejeter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $21{,}9951 < \overline{Y} < 22{,}0049$ mm ; la rejeter sinon.

Question 4.a. À partir de l'histogramme des diamètres de 100 pièces, supposer que toutes les pièces d'une classe ont le diamètre égal au centre de cette classe, puis donner la moyenne des diamètres de l'échantillon. Aucune justification n'est demandée.

Les centres des classes sont $21{,}94$, $21{,}96$, $21{,}98$, $22{,}00$, $22{,}02$, $22{,}04$ et $22{,}06$ mm. D'après l'histogramme, les effectifs correspondants sont 3, 7, 27, 30, 24, 7 et 2. La moyenne est la somme des produits « centre × effectif », divisée par les 100 pièces.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\overline{y} = 21{,}9988$ mm.

Question 4.b. À partir de l'échantillon et de la règle de décision, déterminer si l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée peut être acceptée au seuil de risque de 5 %.

La moyenne observée est $21{,}9988$ mm. Elle appartient à l'intervalle d'acceptation $(21{,}9951\,;\,22{,}0049)$ mm. Au seuil de 5 %, on ne rejette donc pas l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : on ne rejette pas H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement C1, session 2018, code MATGRC1, dure 2 heures et son coefficient est de 2 ou 3 selon la spécialité. Elle traite de la production éolienne et du contrôle de pièces de frein mécanique. Les compétences évaluées comprennent l'ajustement affine, l'étude de fonctions, les lois binomiale, de Poisson et normale, ainsi que les tests d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour extrapoler une puissance à partir d'un ajustement affine, repérer le rang de l'année visée et utiliser l'équation de la droite fournie.
- La valeur moyenne de P sur [a ; b] est égale à $(1/(b-a))\int_a^b P(x)dx$.
- Pour n essais indépendants de probabilité p, le nombre de défaillances suit B(n ; p) et son espérance vaut np.
- Pour un test bilatéral au seuil de 5 %, l'intervalle central sous H_0 contient 95 % des valeurs.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités demandées : convertir notamment la vitesse en bout de pale en km/h et exprimer les puissances dans l'unité requise.
- Recopier avec soin le signe, le dénominateur et l'exposant de la fonction P(v) avant tout calcul.
- Pour la loi binomiale, compter les 210 pales et utiliser la probabilité de défaillance 0,018.
- Pour l'histogramme, pondérer les centres des classes par leurs effectifs, puis comparer la moyenne à la règle du test.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une puissance moyenne lorsque la vitesse du vent varie sur un intervalle ?

On calcule l'intégrale de P entre les deux bornes de l'intervalle, puis on la divise par la longueur de cet intervalle. Il faut conserver les bornes en m/s et exprimer le résultat dans l'unité de puissance demandée.

Q : Quand peut-on approcher la loi binomiale par une loi de Poisson dans cet exercice ?

Le sujet indique de vérifier $n > 30$ et $np(1 - p) \leq 10$. Lorsque ces conditions sont satisfaites, on utilise une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ pour estimer les probabilités demandées.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points, et plusieurs parties peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les unités.

Q : Quelles consignes de notation faut-il respecter dans ce sujet ?

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Dans l'exercice 2, arrondissez les résultats à 10^{-4} près, sauf indication particulière, et suivez les consignes du QCM.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2018/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.