Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRD** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : Analyses de biologie médicale 1 ; Bio analyses et contrôles 2 ; Biotechnologies 1 ; Europlastics et composites 2 ; Métiers de l'eau 1,5 ; Qualités dans les industries alimentaires et les bio-industries 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Scanographies, probabilités et délais d'attente (12 questions) **Page 3**

2. Refroidissement rapide de barquettes de plats cuisinés (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 14**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2018/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 1-Sujet.pdf

1. Scanographies, probabilités et délais d'attente

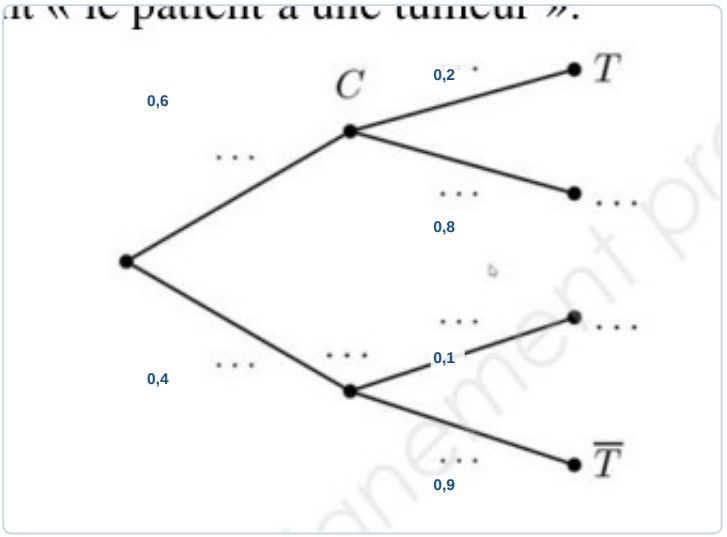
L'exercice étudie les résultats de scanographies dans un hôpital, notamment la détection de tumeurs selon la zone examinée et l'estimation d'une proportion de patients guéris. Il modélise aussi les délais d'attente par une loi exponentielle et étudie le nombre de patients attendant au plus huit jours.

Partie A

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré à partir des proportions fournies concernant les scanographies du cerveau et la présence ou l'absence d'une tumeur.

À la première bifurcation, les probabilités sont celles d'une scanographie du cerveau et d'une autre scanographie. Sur chaque branche, on inscrit ensuite les probabilités conditionnelles de tumeur et d'absence de tumeur. Les probabilités complémentaires sont obtenues en retranchant chaque proportion à 1. L'arbre distingue ainsi les événements C et non C, puis T et non T.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

C : 0,6 ; non C : 0,4 ; puis, dans l'ordre T et non T : 0,2 et 0,8 pour C, 0,1 et 0,9 pour non C.

Question 2. Montrer que la probabilité qu'un patient choisi au hasard ait une tumeur est égale à 0,16.

Une tumeur peut être observée après une scanographie du cerveau ou après une autre scanographie. La formule des probabilités totales donne donc la somme des probabilités de ces deux chemins : $P(T) = P(C)P(T \mid C) + P(\overline{C})P(T \mid \overline{C}) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,1 = 0,16$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un patient choisi au hasard ait une tumeur est $0,16$, soit $16\,\%$.

Question 3. **Sachant que la scanographie détecte une tumeur, déterminer la probabilité que cette tumeur ait été détectée au cerveau.**

> Parmi les patients ayant une tumeur, la proportion de ceux dont la scanographie concerne le cerveau est la probabilité conditionnelle $P(C \mid T)$. On utilise $P(C \cap T) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$ et $P(T) = 0,16$, d'où $P(C \mid T) = \dfrac{0,12}{0,16} = 0,75$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité cherchée est $0,75$, soit $75\,\%$.

Question 4. a). **À partir de l'échantillon de 40 patients atteints d'une tumeur au cerveau, dont 25 ont été guéris après traitement, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de patients guéris.**

La fréquence observée des guérisons parmi les 40 patients est le quotient du nombre de patients guéris par l'effectif total. Cette fréquence constitue l'estimation ponctuelle de la proportion inconnue : $f = \dfrac{25}{40} = 0,625$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $f = 0,625$, soit $62,5\,\%$.

Question 4. b). **Estimer la proportion inconnue p par un intervalle de confiance au seuil de 95 %, en arrondissant les bornes au millième.**

Borne	Calcul	Valeur arrondie
Inférieure	$0,625 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,625(1-0,625)}{40}}$	0,475
Supérieure	$0,625 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,625(1-0,625)}{40}}$	0,775

On applique la formule de l'intervalle de confiance à 95 % avec la fréquence observée $f = 0,625$ et l'effectif $n = 40$, puis on arrondit chaque borne au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,475\,;\,0,775]$.

Partie B

Question 1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle modélisant le délai d'attente, sachant que le délai moyen est de 10 jours.

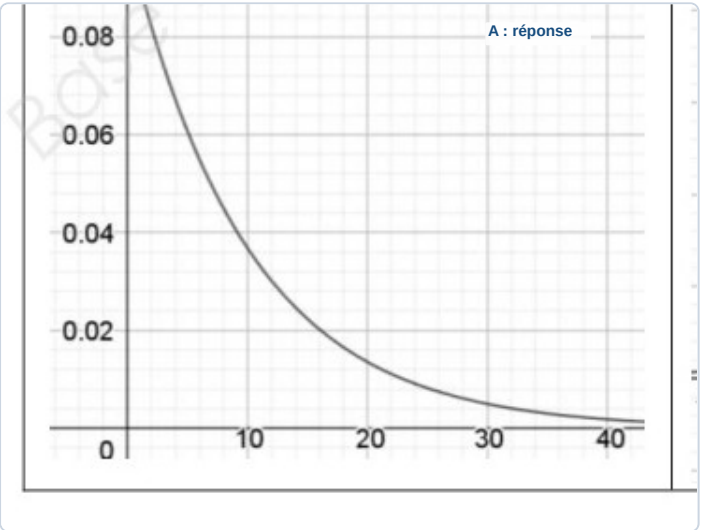
1. Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $\frac{1}{\lambda}$. Le délai moyen étant de 10 jours, $\frac{1}{\lambda} = 10$, donc $\lambda = \frac{1}{10} = 0,1$. Le paramètre s'exprime en inverse de l'unité de temps, ici en jours^{-1}.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le paramètre de la loi exponentielle est $\lambda = 0,1$ jour^{-1}.

Question 2. Parmi les trois représentations graphiques proposées, indiquer celle qui correspond à la densité de la loi exponentielle du délai d'attente, sans justification.

La représentation correspondant à la densité de la loi exponentielle est la représentation A.

Graphique correspondant à la densité



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse : représentation A.

Question 3. À l'aide de la formule donnée pour la fonction de répartition d'une loi exponentielle, calculer au millième la probabilité qu'un délai d'attente ne dépasse pas huit jours.

La fonction de répartition donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0,1$ par jour et $t = 8$ jours, on obtient $P(T \leq 8) = 1 - e^{-0,1 \times 8} = 1 - e^{-0,8} \approx 0,551$, au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un délai ne dépasse pas huit jours est $0,551$.

Partie C

Question 1. Dans le QCM, déterminer quelle loi suit X, le nombre de patients parmi 200 dont le délai d'attente ne dépasse pas huit jours, en choisissant parmi les trois propositions.

- Pour chaque patient, l'événement « délai au plus égal à huit jours » a la probabilité $0,55$.
- Le nombre X de patients concernés parmi 200 essais indépendants suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,55$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Réponse A : X suit la loi binomiale de paramètres 200 et $0,55$.

Question 2. Dans le QCM, choisir l'expression correspondant à la probabilité que le quart des 200 patients ait un délai d'attente ne dépassant pas huit jours.

Le quart de l'échantillon correspond à $200 \times \frac{1}{4} = 50$ patients. L'événement demandé est donc que le nombre X de patients ayant attendu au plus huit jours soit exactement égal à 50.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Réponse C : la probabilité cherchée est $P(X = 50)$.

Question 3. Dans le QCM, choisir la valeur approchée au millième de la probabilité que moins de la moitié des 200 patients ait un délai d'attente ne dépassant pas huit jours.

« Moins de la moitié » signifie strictement moins de 100 patients, donc l'événement est $X < 100$. Pour la loi binomiale de paramètres 200 et 0,55, la probabilité correspond à la proposition B du QCM, arrondie au millième.

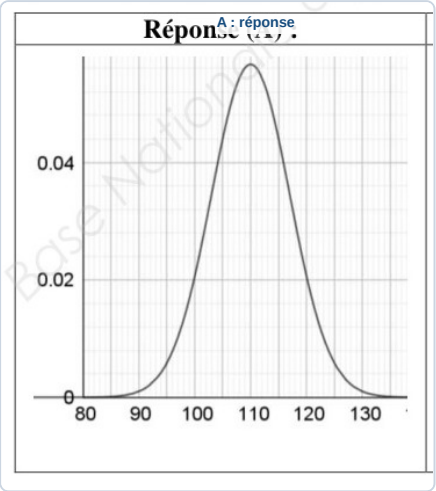
✓ RÉPONSE À RETENIR

Réponse B : $P(X < 100) \approx 0,068$.

Question 4. La loi de X étant approchée par une loi normale, choisir parmi les trois graphiques celui qui représente cette loi.

La loi normale d'approximation a pour moyenne $\mu = np = 200 \times 0,55 = 110$ et pour écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{49,5} \approx 7,04$. Le graphique doit donc être centré en 110 et présenter une dispersion compatible avec cet écart type : c'est la représentation A.

Graphique de la loi normale



✓ RÉPONSE À RETENIR

Réponse A : la courbe normale centrée en 110, avec un écart type d'environ $7,04$.

2. Refroidissement rapide de barquettes de plats cuisinés

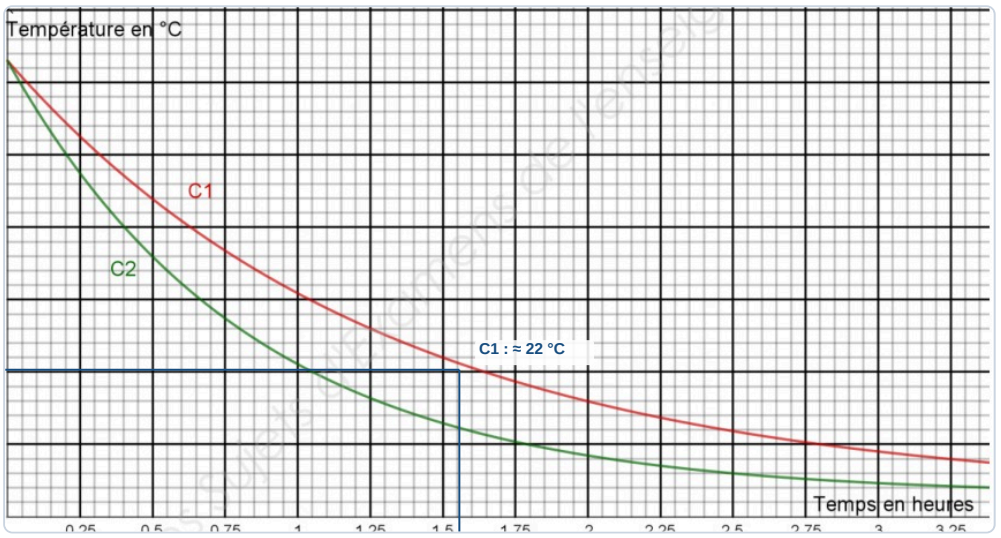
L'exercice porte sur le refroidissement de barquettes en restauration collective et sur le respect de la règle limitant à deux heures le passage entre +63 °C et +10 °C. Il compare deux réglages à partir de courbes, puis modélise la température par un algorithme et des fonctions liées à une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Lire sur la courbe du réglage n° 1 la température de la barquette après 90 minutes dans la cellule de refroidissement rapide.

Le temps est exprimé en heures sur le graphique. On convertit donc 90 minutes en 1,5 heure, puis on lit l'ordonnée de C1 à cette abscisse. La lecture reste graphique et donc approximative : la température correspondante est d'environ 22 °C.

Lecture sur C1 à 1,5 h



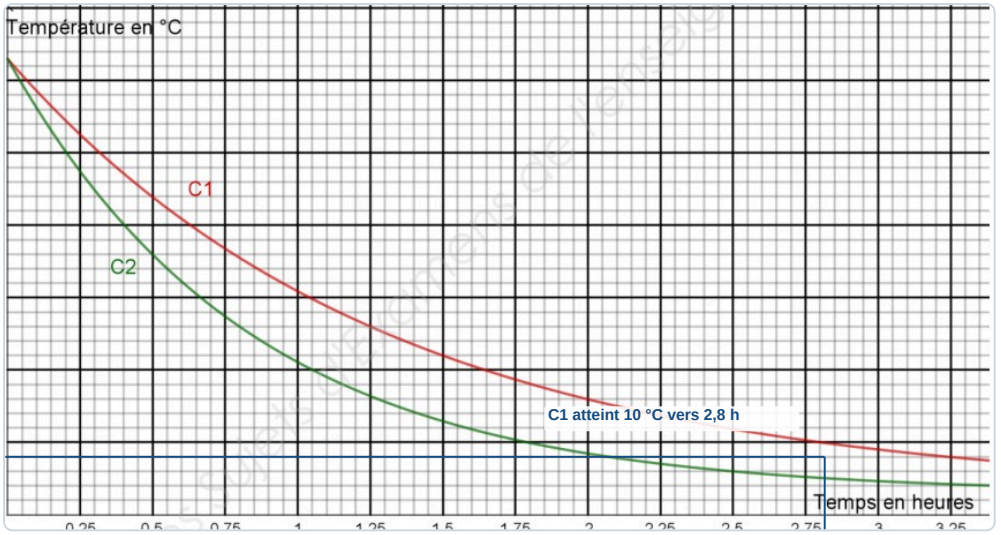
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Environ 22 °C après 90 minutes.

Question 2. a). Déterminer si le réglage n° 1 respecte la réglementation sur la durée de refroidissement entre +63 °C et +10 °C, en justifiant à partir du graphique.

La barquette est à 63 °C au début du refroidissement. Sur C1, la lecture du seuil de 10 °C donne un temps d'environ 2,8 heures. La durée passée entre 63 °C et 10 °C dépasse donc les 2 heures autorisées : le réglage n° 1 ne respecte pas la réglementation.

Seuil réglementaire sur C1



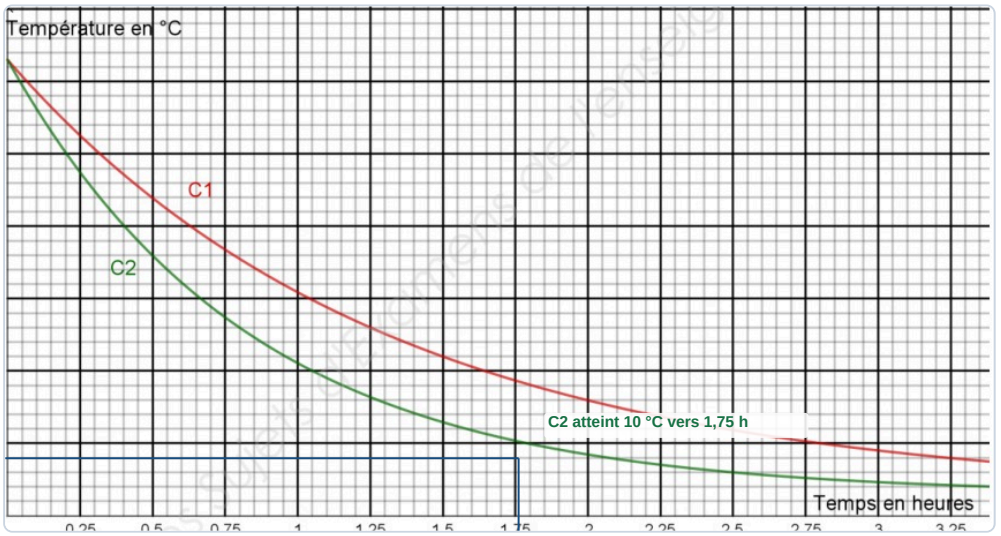
✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : environ 2,8 h entre 63 °C et 10 °C, soit plus de 2 h.

Question 2. b). Déterminer si le réglage n° 2 respecte la réglementation et estimer, à l'aide du graphique, le temps nécessaire pour atteindre +10 °C.

Sur C2, la température atteint 10 °C au bout d'environ 1,75 heure. Cette durée est inférieure à la limite réglementaire de 2 heures : le réglage n° 2 est conforme. La conversion en minutes donne $1,75 \times 60 = 105$ minutes, soit 1 heure et 45 minutes.

Seuil réglementaire sur C2



✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : environ 1,75 h, soit 105 minutes.

Question 3. Expliquer pourquoi l'affirmation selon laquelle la température baisse de 5 % toutes les minutes avec le réglage n° 2 contredit la courbe C2.

Une baisse de 5 % par minute signifie que la température est multipliée par 0,95 chaque minute. En répétant cette baisse, la température tendrait vers 0 °C. Or la courbe C2 se rapproche d'une valeur voisine de 3 °C, température de la cellule. L'affirmation ne correspond donc pas au comportement représenté.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La baisse de 5 % conduirait à 0 °C, alors que C2 se stabilise vers 3 °C.

Question 4. Compléter les lignes 3, 4 et 5 de l'algorithme pour déterminer au bout de combien de temps la température, qui baisse de 2 % par minute avec le réglage n° 3, devient inférieure à +10 °C.

1. Ligne 3 : tant que $T \geq 10$.
2. Ligne 4 : affecter à N la valeur $N + 1$.
3. Ligne 5 : affecter à T la valeur $0,98T$.

La boucle applique une baisse de 2 % par minute et s'arrête dès que la température passe sous 10 °C. Après 91 minutes, elle est encore au-dessus du seuil ; après 92 minutes, elle est en dessous.

Algorithme complété

1	N ← 0
2	T ← 63
3	Tant que ..... T ≥ 10
4	Affecter à N la valeur ... N + 1 .....
5	Affecter à T la valeur .....
6	Fin Tant que 0,98 × T

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Lignes 3 à 5 : $T \geq 10$; $N + 1$; $0,98T$. Seuil franchi après 92 minutes.

Partie B

Question 1. a). À partir de l'équation différentielle y′ = −1,2(y − 3), démontrer qu'elle peut s'écrire sous la forme y′ + 1,2y = 3,6.

On développe le membre de droite de l'équation donnée : $y' = -1,2(y - 3) = -1,2y + 3,6$. En ajoutant $1,2y$ aux deux membres, on obtient la forme demandée, sans modifier les solutions de l'équation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y' + 1,2y = 3,6$.

Question 1. b). Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène y′ + 1,2y = 0 sur [0 ; +∞[.

L'équation homogène est $y' + 1,2y = 0$. D'après la forme des solutions de $ay' + by = 0$, elles sont de la forme $ke^{-\frac{b}{a}t}$. Ici, $a = 1$ et $b = 1,2$, donc la constante multiplicative k est réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-1,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

Question 1. c). Vérifier que la fonction constante égale à 3 est une solution particulière de l'équation différentielle y′ + 1,2y = 3,6, puis en déduire l'ensemble de ses solutions.

Pour la fonction constante $y(t) = 3$, la dérivée est nulle. On vérifie alors $y' + 1,2y = 0 + 1,2 \times 3 = 3,6$: c'est bien une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) s'obtient en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-1,2t} + 3$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. d). Expliquer pourquoi f(0) = 63, puis déduire des résultats précédents une expression de f(t) pour tout t de [0 ; +∞[.

À l'instant initial, la barquette vient d'atteindre 63 °C, donc $f(0) = 63$. Dans la solution générale $f(t) = ke^{-1,2t} + 3$, la condition initiale donne $k + 3 = 63$, soit $k = 60$. On obtient ainsi l'expression de la température pour tout temps positif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 60e^{-1,2t} + 3$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2. Avec l'expression f(t) = 60e^(−1,2t) + 3, calculer f(2) au centième et interpréter le résultat dans le contexte.

On remplace t par 2 dans le modèle : $f(2) = 60e^{-1,2\times 2} + 3 \approx 8,44$. Le temps étant exprimé en heures, cette valeur correspond à la température de la barquette après deux heures de refroidissement avec le réglage n° 2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(2) \approx 8,44\ ^\circ\text{C}$ après deux heures.

Question 3. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers +∞ et interpréter cette limite dans le contexte du refroidissement.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-1,2t}$ tend vers 0. Par conséquent, $60e^{-1,2t} + 3$ tend vers 3. La température de la barquette se rapproche donc de 3 °C, la température de la cellule de refroidissement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 3\ ^\circ\text{C}$.

Question 4. Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur approchée 30,8 °C donnée pour la température moyenne de la barquette sur l'intervalle de temps considéré.

La quantité donnée est la valeur moyenne de f entre $t = 0$ et $t = 1,5$ heure : $\frac{1}{1,5-0} \int_0^{1,5} f(t)\,dt \approx 30,8$. Elle représente la température moyenne de la barquette pendant les 1,5 premières heures de refroidissement avec le réglage n° 2.

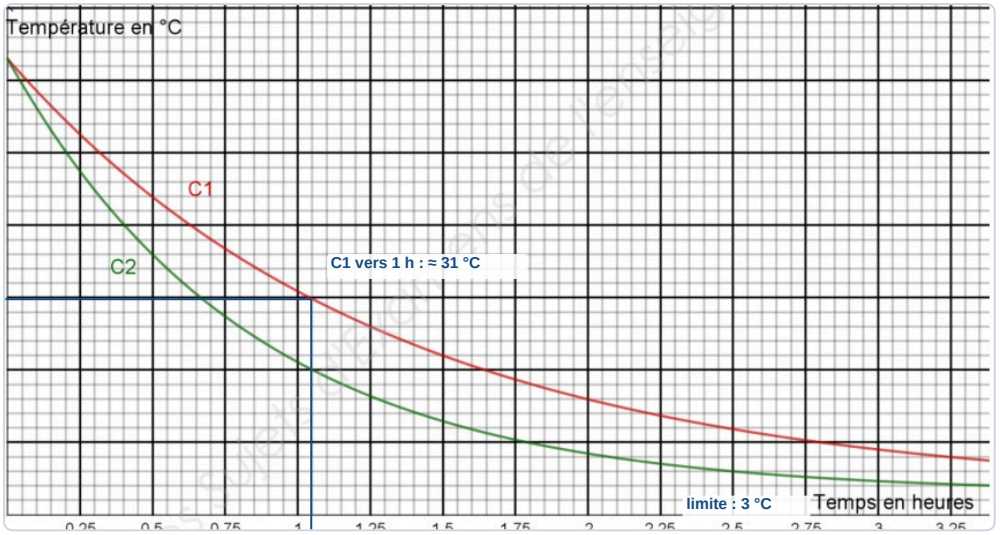
✓ RÉPONSE À RETENIR

Température moyenne sur les 1,5 premières heures : environ 30,8 °C.

Question 5. En s'inspirant de la forme de f, proposer une expression de g(t), température de la barquette avec le réglage n° 1, à partir de la courbe C1, et expliquer la démarche.

On reprend la forme du modèle f : $g(t) = 60e^{-kt} + 3$, car la température initiale est 63 °C et la température limite est 3 °C. Sur C1, on lit environ 31 °C à $t = 1$ heure. Ainsi, $60e^{-k} + 3 \approx 31$, ce qui donne $k \approx -\ln(28/60) \approx 0,76$.

Repères de lecture pour le modèle C1



✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) \approx 60e^{-0{,}76t} + 3$, pour tout $t \geq 0$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement D, session 2018, porte le code MATGRD et dure deux heures. Son coefficient dépend de la spécialité, de 1 à 2. Elle étudie les probabilités de détection de tumeurs et les délais d'attente en scanographie, puis le refroidissement de plats cuisinés. Les compétences évaluées comprennent probabilités, statistiques, lecture graphique, algorithmique et équations différentielles.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut 1/λ et P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % d'une proportion utilise f ± 1,96√(f(1 − f)/n), où f est la fréquence observée et n l'effectif.
- Le nombre de succès dans n essais indépendants de probabilité p suit une loi binomiale de paramètres n et p.
- Pour résoudre y′ + ay = b, on ajoute une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans un arbre pondéré, distinguer les probabilités des branches des probabilités des chemins et vérifier que les branches issues d'un même nœud totalisent 1.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence f et l'effectif n, puis arrondir les bornes à la précision demandée.
- Sur le graphique, convertir les minutes en heures si nécessaire et comparer la durée entre +63 °C et +10 °C au seuil de deux heures.
- Dans l'algorithme, initialiser le temps et la température, tester la condition et appliquer chaque baisse relative à la température courante.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer le paramètre d'une loi exponentielle à partir du délai moyen ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut 1/λ. On pose donc 1/λ égal au délai moyen fourni, puis on isole λ en conservant l'unité inverse du temps utilisé.

Q : Comment modéliser une baisse de température de 2 % chaque minute ?

Une baisse de 2 % signifie que la température restante est multipliée par 0,98 à chaque minute. Après N minutes, elle vaut donc la température initiale multipliée par 0,98^N.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve de deux heures ?

L'exercice 1 vaut 9 points et l'exercice 2 vaut 11 points. Répartissez votre temps en conséquence et gardez quelques minutes pour vérifier les unités et les arrondis. Le QCM ne retire aucun point en cas d'erreur ou d'absence de réponse.

Q : Quelle règle réglementaire faut-il vérifier dans l'exercice sur le refroidissement ?

Il faut vérifier que la barquette ne reste pas plus de deux heures entre +63 °C et +10 °C. Appuyez-vous sur la courbe pour estimer le temps d'atteinte de +10 °C et indiquez clairement les unités.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2018/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.