Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2017 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Régulateur de niveau : équation différentielle et étude de la fonction hauteur (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test de conformité en métallurgie (11 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2017/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 3-Sujet.pdf

1. Régulateur de niveau : équation différentielle et étude de la fonction hauteur

Dans un régulateur, la hauteur h(t) du liquide, en mètres, varie au cours du temps t, en heures. L'exercice modélise cette évolution par une équation différentielle, puis étudie la fonction obtenue, ses variations et son comportement au voisinage de zéro.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1° a). Résoudre dans R l'équation caractéristique 10r² + 3r + 0,2 = 0.

On calcule le discriminant de l'équation du second degré : $\Delta = 3^2 - 4 \times 10 \times 0,2 = 1$. Comme il est positif, il y a deux racines réelles distinctes. La formule donne $r = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{20}$. On évalue les deux signes séparément pour obtenir les solutions exactes de l'équation caractéristique.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r_1 = -0,1$ et $r_2 = -0,2$.

Question 1° b). À partir des racines de l'équation caractéristique, déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène 10y'' + 3y' + 0,2y = 0.

L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, $-0,1$ et $-0,2$. Pour une équation différentielle homogène à coefficients constants, chaque racine r fournit une solution exponentielle e^{rt}. Les deux solutions associées sont indépendantes, donc toute solution est une combinaison linéaire de ces exponentielles, avec des constantes réelles arbitraires.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = \lambda e^{-0,1t} + \mu e^{-0,2t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, +∞[par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle 10y'' + 3y' + 0,2y = 1.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = g''(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $10g''(t) + 3g'(t) + 0,2g(t) = 10 \times 0 + 3 \times 0 + 0,2 \times 5 = 1$. Le membre de gauche est égal au membre de droite : g est bien une solution particulière de (E).

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 3°. Déduire des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière g l'ensemble des solutions de l'équation différentielle 10y'' + 3y' + 0,2y = 1.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée. On reprend donc les deux exponentielles trouvées précédemment. Les coefficients de leur combinaison linéaire sont arbitraires, car aucune condition initiale n'est imposée dans cette question.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + \lambda e^{-0,1t} + \mu e^{-0,2t}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Avec les conditions initiales h(0) = 8 et h'(0) = 0 et l'expression de h fournie par le logiciel, déterminer la hauteur du liquide au bout de deux heures. Arrondir au dixième.

Le logiciel donne $h(t) = 6e^{-0,1t} - 3e^{-0,2t} + 5$. Pour deux heures, on remplace t par 2 : $h(2) = 6e^{-0,1\times 2} - 3e^{-0,2\times 2} + 5 \approx 7,9014$. La hauteur étant exprimée en mètres, on arrondit cette valeur au dixième, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au bout de deux heures, la hauteur est d'environ $7,9$ m.

B. Étude de fonction

Question 1° a). Pour h(t) = 6e^(-0,1t) - 3e^(-0,2t) + 5, justifier que lim h(t) = 5 lorsque t tend vers +∞.

La fonction s'écrit $h(t) = 6e^{-0,1t} - 3e^{-0,2t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les deux exposants $-0,1t$ et $-0,2t$ tendent vers $-\infty$. Les exponentielles tendent donc vers zéro. Les deux termes qui les multiplient s'annulent à la limite et seul subsiste le terme constant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 5$.

Question 1° b). Interpréter graphiquement le résultat de la limite en faisant référence à la courbe C et à la droite D d'équation y = 5.

La limite indique que, lorsque le temps augmente indéfiniment, les valeurs de $h(t)$ se rapprochent de 5. Ainsi, sur le graphique, la courbe C se rapproche de la droite horizontale D, d'équation $y = 5$. Cette droite est une asymptote horizontale à C en $+\infty$. Pour $t \geq 0$, $h(t) - 5 = 3e^{-0,1t}(2 - e^{-0,1t}) \geq 0$: la courbe l'approche par-dessus.

✓ RÉPONSE À RETENIR

D : $y = 5$ est l'asymptote horizontale de C en $+\infty$, approchée par-dessus.

Question 2°. Déterminer une expression de la dérivée h'(t).

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, la dérivée de $6e^{-0,1t}$ est $-0,1 \times 6e^{-0,1t}$, et celle de $-3e^{-0,2t}$ est $-3 \times (-0,2)e^{-0,2t}$. La dérivée de la constante 5 est nulle. On simplifie les coefficients obtenus.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h'(t) = -0,6e^{-0,1t} + 0,6e^{-0,2t}$.

Question 3°. En utilisant le résultat admis selon lequel h'(t) ≤ 0 sur [0, +∞[, dresser le tableau de variation de h sur cet intervalle.

t	0	$+\infty$
Signe de $h'(t)$	≤ 0	≤ 0
Variation de h	8	5

Le résultat admis garantit que $h'(t) \leq 0$, donc h est décroissante sur tout l'intervalle. La valeur initiale est $h(0) = 6 - 3 + 5 = 8$, et la limite en $+\infty$ est 5. Le tableau traduit cette décroissance de 8 vers 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

h décroît de 8 vers 5 sur $[0, +\infty[$.

C. Étude locale

Question 1°. Parmi les propositions, recopier le développement limité à l'ordre 2 de h au voisinage de 0. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le polynôme de Taylor fourni par le logiciel est $8 - \frac{3}{100}t^2$. Pour écrire le développement limité à l'ordre 2, on ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. La réponse correcte est donc la proposition avec ce polynôme et cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h(t) = 8 - \frac{3}{100}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 2°. Parmi les propositions, recopier une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = h(0) + h'(0)t$. On a $h(0) = 6 - 3 + 5 = 8$. D'après la dérivée, $h'(0) = -0,6 + 0,6 = 0$. La tangente est donc horizontale et passe par le point $(0; 8)$. Parmi les propositions, il faut retenir l'équation de cette droite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 8$.

Question 3°. Étudier, au voisinage du point d'abscisse 0, la position relative de la courbe C et de sa tangente T.

La tangente en zéro est $y = 8$. Le développement limité donne $h(t) - 8 = t^2\left(-\frac{3}{100} + \varepsilon(t)\right)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Pour $t > 0$ suffisamment proche de zéro, le terme entre parenthèses est négatif, tandis que $t^2 > 0$. Ainsi, $h(t) - 8 < 0$: la courbe est située sous sa tangente au voisinage considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $t > 0$ proche de zéro, C est sous la tangente T.

2. Probabilités et test de conformité en métallurgie

Une entreprise de métallurgie fabrique des plaques destinées aux carlingues d'avion et des billes d'acier pour roulements. L'exercice porte sur la durée de fonctionnement d'une machine, le contrôle des défauts dans un échantillon de billes et un test bilatéral de conformité de leurs diamètres.

A. Loi exponentielle

Question 1°. La durée T de bon fonctionnement entre deux étalonnages suit une loi exponentielle de paramètre λ = 2 × 10⁻⁴. Déterminer P(T ≤ 2 000).

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 2 \times 10^{-4}$ et $t = 2\,000$, le produit λt vaut $0,4$. Ainsi, $P(T \leq 2\,000) = 1 - e^{-0,4}$. Le résultat approché est à arrondir à 10^{-4}, conformément à la consigne de l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \leq 2\,000) \approx 0,3297$.

Question 2°. Déterminer la probabilité que la durée de bon fonctionnement de la machine dépasse 10 000 heures.

La probabilité que la durée dépasse t est la probabilité complémentaire : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ heures, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-0,0002 \times 10\,000} = e^{-2}$. On arrondit le résultat à quatre décimales, comme demandé dans l'exercice. Cette probabilité décrit la chance que la machine fonctionne encore après 10 000 heures sans étalonnage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,1353$, soit $13,53\,\%$.

Question 3°. Calculer l'espérance E(T), puis interpréter ce résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, on trouve $E(T) = \dfrac{1}{0,0002} = 5\,000$ heures. Cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement entre deux étalonnages, considérée sur un grand nombre de périodes de fonctionnement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 5\,000$ heures en moyenne entre deux étalonnages.

B. Loi binomiale et approximation par une loi normale

Question 1°. Justifier que le nombre X de billes présentant un défaut dans un échantillon de 1 000 billes suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Chaque bille constitue un essai à deux issues : elle est défectueuse ou non. La probabilité d'un défaut est constante et vaut $0,5\% = 0,005$. Le prélèvement est assimilé à 1 000 tirages avec remise, donc les essais sont indépendants. Le nombre X de billes défectueuses compte les succès parmi ces 1 000 essais de même probabilité. Il suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,005$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(1\,000\,;\,0,005)$.

Question 2° a). Calculer P(X = 0) et interpréter le résultat obtenu.

L'événement $X = 0$ signifie qu'aucune des 1 000 billes n'est défectueuse. La probabilité qu'une bille ne présente pas de défaut est $1 - 0,005 = 0,995$. Par indépendance des tirages, $P(X = 0) = 0,995^{1000} \approx 0,0067$. Cela signifie qu'environ 0,67 % des échantillons de 1 000 billes ne contiennent aucun défaut.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) \approx 0,0067$, soit $0,67\,\%$.

Question 2° b). En déduire la probabilité qu'au moins une bille de l'échantillon présente un défaut de fabrication.

L'événement « au moins une bille présente un défaut » est le complément de l'événement $X = 0$. On utilise donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$. Avec la probabilité calculée à la question précédente, cela donne $P(X \geq 1) = 1 - 0,995^{1000}$. Le résultat est arrondi à quatre décimales, comme le demande la consigne générale de l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X \geq 1) \approx 0,9933$, soit $99,33\,\%$.

Question 3° a). Justifier les paramètres de la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 2,2 utilisée pour approcher la loi de X.

Paramètre	Calcul	Valeur
Moyenne	$np = 1\,000 \times 0,005$	5
Écart type	$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1\,000 \times 0,005 \times 0,995}$	$\approx 2,23$

La loi binomiale a donc une moyenne de 5 et un écart type d'environ 2,2. Ces valeurs justifient les paramètres de la loi normale choisie pour approcher la loi de X.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La loi normale d'approximation a pour moyenne 5 et écart type $2,2$.

Question 3° b). À l'aide de cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 7 billes présentant un défaut dans le lot de 1 000 billes, c'est-à-dire calculer P(Y ≤ 7,5).

On utilise la loi normale Y de moyenne 5 et d'écart type 2,2. La borne demandée est déjà corrigée pour le passage de la variable discrète à la loi normale : il faut calculer $P(Y \leq 7,5)$. La variable centrée réduite associée à 7,5 vaut $z = \dfrac{7,5 - 5}{2,2} \approx 1,1364$. La lecture de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donne la probabilité cherchée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 7,5) \approx 0,8721$, soit $87,21\,\%$.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous H_0 : $\mu = 55$, choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que $P(55 - h \leq \bar{Z} \leq 55 + h) = 0,95$. Une seule proposition est correcte et aucune justification n'est demandée.

Sous H_0, l'écart type de la moyenne des 100 diamètres est $\dfrac{0,15}{\sqrt{100}} = 0,015$. L'intervalle central de 95 % d'une loi normale s'étend d'environ 1,96 écart type de part et d'autre de sa moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,015 = 0,0294$, soit $0,03$ au centième. La proposition correcte est donc celle-ci.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h = 0,03$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser le test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, on compare la moyenne observée à l'intervalle central de 95 % sous H_0. Avec $h = 0,03$, cet intervalle est $[55 - 0,03\,;\ 55 + 0,03] = [54,97\,;\ 55,03]$ mm. La règle de décision est de ne pas rejeter H_0 si la moyenne observée appartient à cet intervalle. Si elle est à l'extérieur, on rejette H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $54,97 \leq \bar{z} \leq 55,03$ mm ; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. Pour un échantillon de 100 billes dont la moyenne des diamètres est z̄ = 55,06 mm, donner la conclusion du test.

La moyenne observée est $\bar{z} = 55,06$ mm. Elle dépasse la borne supérieure $55,03$ mm de l'intervalle de décision $[54,97\,;\,55,03]$. Elle n'appartient donc pas à cet intervalle. D'après la règle du test bilatéral au seuil de 5 %, on rejette l'hypothèse nulle selon laquelle la moyenne des diamètres vaut 55 mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 : la livraison est déclarée non conforme au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2017)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2017, code MATGRB1, durée 2 heures et coefficient variable selon la spécialité. Deux exercices de 10 points portent sur la modélisation d'un régulateur de niveau par équation différentielle et étude locale, puis sur des probabilités en métallurgie et un test bilatéral de conformité des diamètres.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire du second ordre, les racines de l'équation caractéristique déterminent la solution générale de l'équation homogène.
- La solution générale avec second membre est la somme de la solution générale homogène et d'une solution particulière.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et E(T) = 1/λ.
- Pour X suivant B(n,p), son espérance vaut np et son écart type √(np(1-p)); une approximation normale peut nécessiter une correction de continuité.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer l'équation homogène de l'équation avec second membre et vérifier la solution particulière.
- Respecter les unités et les arrondis demandés, notamment au dixième ou à 10^{-4}.
- Pour l'approximation normale d'un nombre entier, utiliser la correction de continuité indiquée dans l'énoncé.
- Dans le test bilatéral, comparer la moyenne observée aux deux bornes de l'intervalle d'acceptation.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution générale de l'équation différentielle du régulateur ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique pour obtenir la solution générale de l'équation homogène. Ajoutez ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre, puis appliquez les conditions initiales si une solution précise est demandée.

Q : Pourquoi calcule-t-on P(Y ≤ 7,5) pour représenter au plus 7 billes défectueuses ?

Le nombre de billes est entier, tandis que la loi normale est continue. La correction de continuité transforme l'événement X ≤ 7 en l'approximation Y ≤ 7,5, comme le demande l'énoncé.

Q : Comment gérer les arrondis et le temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Repérez les questions indépendantes, répartissez le temps entre les exercices et arrondissez les résultats approchés à 10^{-4} dans l'exercice 2, sauf indication contraire.

Q : Comment décider si la livraison est conforme au test bilatéral ?

Comparez la moyenne observée à l'intervalle centré sur 55 et défini par les bornes du test au seuil de 5 %. Si elle est à l'intérieur, ne rejetez pas H_0; si elle est à l'extérieur, rejetez H_0.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2017/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.