Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2017 • Code sujet : **MATGRC1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Innovation textile (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Croissance du volume de bois fort d'un Douglas (14 questions) **Page 3**

2. Production, contrôle de conformité et assemblage de manettes (11 questions) **Page 9**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2017/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 2-Sujet.pdf

1. Croissance du volume de bois fort d’un Douglas

L’exercice étudie la croissance du volume de bois fort d’un plant de Douglas âgé d’au moins dix ans, à partir de relevés effectués à différents âges. Il compare un ajustement statistique de Q = ln(7/V - 1) et un modèle par équation différentielle pour prévoir les volumes et l’âge de commercialisation.

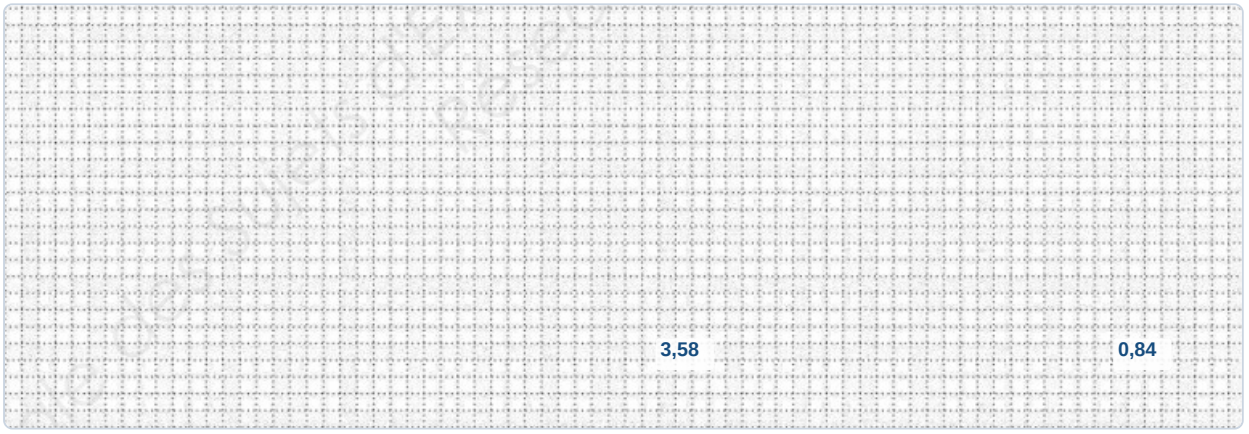
Partie 1 : Modèle statistique

Question 1). Compléter le tableau de l’annexe 1 donnant Q = ln(7/V - 1) en fonction de t, en arrondissant les valeurs au 10^{-2} près.

Pour chaque âge, on calcule Q = ln(7/V - 1). Les valeurs manquantes sont obtenues avec V = 0,19 puis V = 2,11, et sont arrondies au centième.

t (années)	10	20	30	50
V (m³)	0,09	0,19	0,51	2,11
Q	4,34	3,58	2,54	0,84

Annexe 1 complétée



✓ RÉPONSE À RETENIR

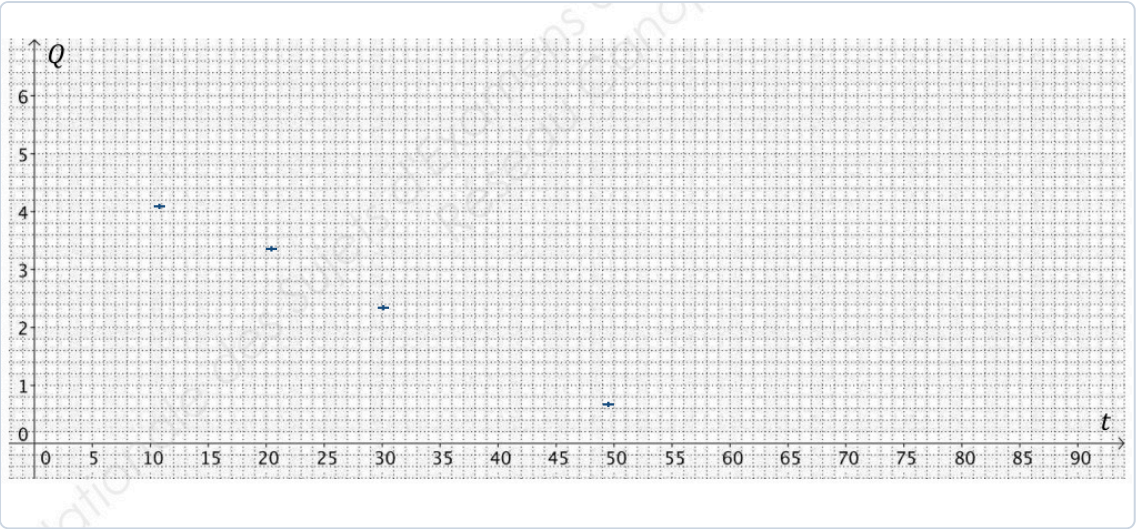
Q(20) = 3,58 et Q(50) = 0,84.

Question 2). Représenter dans le repère de l’annexe 2 le nuage de points de la série statistique constituée des variables t et Q.

On reporte les quatre couples (t ; Q) du tableau dans le repère de l’annexe 2 : t se lit sur l’axe horizontal et Q sur l’axe vertical. Les valeurs de Q sont celles arrondies au centième à la question précédente.

Les points du nuage sont (10 ; 4,34), (20 ; 3,58), (30 ; 2,54) et (50 ; 0,84).

Nuage de points (t ; Q)



✓ RÉPONSE À RETENIR

(10 ; 4,34), (20 ; 3,58), (30 ; 2,54), (50 ; 0,84).

Question 3). À partir des résultats affichés à l'écran de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de Q en t par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au 10^{-3} près.

L'écran de la calculatrice donne a = -0,088616 et b = 5,2627999 pour la droite de régression Q = at + b. Après arrondi de chaque coefficient au millième, on obtient l'équation demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Q = -0,089t + 5,263.

Question 4). Utiliser la droite d'ajustement obtenue pour déterminer la valeur prévisible de Q lorsque t = 80.

On utilise les coefficients arrondis de la droite obtenue à la question 3. Pour t = 80, Q = -0,089 × 80 + 5,263 = -1,857.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour t = 80, Q = -1,857.

Question 5). À partir de l'ajustement, déterminer le volume de bois fort que l'on peut espérer tirer du plant lorsqu'il aura 80 ans.

La définition $Q = \ln(7/V - 1)$ donne $e^Q = 7/V - 1$, donc $V = 7/(e^Q + 1)$. Avec la valeur prévisible $Q = -1{,}857$ pour $t = 80$, on obtient $V = 7/(e^{-1{,}857} + 1)$.

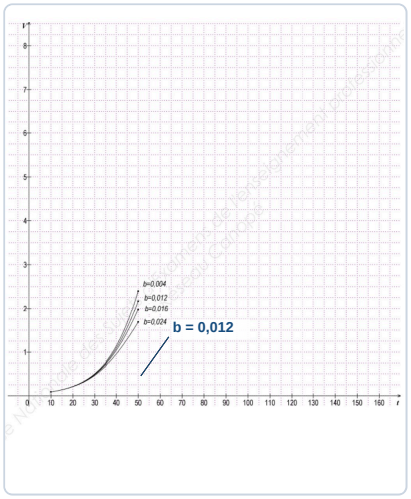
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 80 ans, le volume prévu est d'environ 6,05 m³.

Partie 2 : Modèle dynamique

Question 1). À l'aide des courbes de l'annexe 3 représentant les volumes de bois fort pour différentes valeurs de b, expliquer pourquoi on peut choisir b = 0,012 pour le plant de Douglas étudié.

Sur l'annexe 3, au point d'âge t = 50 ans, le volume mesuré est 2,11 m³. La courbe étiquetée b = 0,012 passe au voisinage de ce point, contrairement aux courbes correspondant aux autres valeurs de b. On peut donc retenir b = 0,012 pour ce plant.

Repérage de la courbe b = 0,012



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le paramètre retenu est b = 0,012.

Question 2a). Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,088y = 0.

L'équation homogène y' + 0,088y = 0 s'écrit y' = -0,088y. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions exponentielles associées au coefficient -0,088, avec une constante réelle arbitraire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,088t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Question 2b). Démontrer que la fonction constante g définie sur [10 ; +∞[par g(t) = 0,012/0,088 est une solution particulière de l'équation différentielle (E) : y' + 0,088y = 0,012.

La fonction g est constante, donc g'(t) = 0. En substituant g(t) = 0,012/0,088 dans le membre de gauche, on obtient g' + 0,088g = 0 + 0,088 × (0,012/0,088) = 0,012. Elle vérifie donc l'équation (E).

✓ RÉPONSE À RETENIR

g(t) = 0,012/0,088 est une solution particulière de (E).

Question 2c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,088y = 0,012.

La solution générale de l'équation complète est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. En ajoutant g(t) = 0,012/0,088 aux solutions trouvées en 2a, on obtient toutes les solutions de (E).

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,088t} + 0,012/0,088$, $C \in \mathbb{R}$.

Question 2d). Calculer f(10), puis déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) correspondant au plant de Douglas étudié.

Comme f(t) = 1/V(t) et que V(10) = 0,09, f(10) = 1/0,09. Dans la solution générale, on impose cette condition : $C = (f(10) - 0,012/0,088)e^{0,88}$. Ainsi, $f(t) = Ce^{-0,088t} + 0,012/0,088$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(10) \approx 11,11$ et $f(t) \approx 26,46e^{-0,088t} + 0,13636$.

Question 3a). En admettant que le volume est défini par $V(t) = 1/(26,46e^{-0,088t} + 0,14)$, déterminer le volume de bois fort que l'on peut espérer lorsque le plant aura 80 ans.

On remplace t par 80 dans l'expression fournie : $V(80) = 1/(26,46e^{-0,088\times80} + 0,14)$. Le calcul donne le volume espéré en mètres cubes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

V(80) ≈ 6,13 m³.

Question 3b). Expliquer pourquoi la courbe représentative de la fonction V admet une asymptote horizontale et en donner une équation.

Lorsque t tend vers +∞, $e^{-0,088t}$ tend vers 0. Le dénominateur de V(t) tend alors vers 0,14, donc V(t) tend vers 1/0,14. La courbe admet une asymptote horizontale correspondant à cette limite.

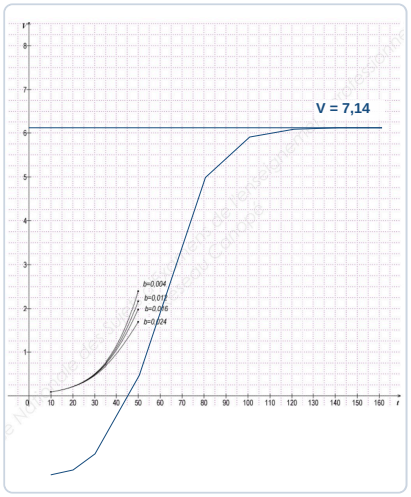
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : V = 1/0,14 ≈ 7,14 m³.

Question 3c). Tracer l'asymptote sur le graphique de l'annexe 3 et compléter la courbe représentative de V. L'étude des variations de V n'est pas attendue.

Sur l'annexe 3, tracer la droite horizontale de niveau V = 7,14. Compléter ensuite la courbe de V à partir de t = 10 : elle passe par les volumes mesurés, croît rapidement autour de 50 à 80 ans, puis se rapproche de l'asymptote.

Asymptote et courbe de V



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Tracer V = 7,14 et la courbe de V qui s'en approche par valeurs inférieures.

Question 4). L'Office National des Forêts conseille de commercialiser les Douglas lorsqu'ils ont atteint 85 % de la valeur limite de leur volume de bois fort. Déterminer à quel âge il est conseillé de commercialiser le plant étudié.

La valeur limite vaut 1/0,14. Le seuil de commercialisation est donc 0,85/0,14. On résout $1/(26,46e^{-0,088t} + 0,14) = 0,85/0,14$, ce qui donne $t = -\ln((0,14/0,85 - 0,14)/26,46)/0,088$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La commercialisation est conseillée vers 79 ans.

2. Production, contrôle de conformité et assemblage de manettes

Une entreprise fabrique par injection plastique les demi-coques supérieures et inférieures des manettes de la console XS5. L'exercice porte sur la conformité des pièces selon leur masse, le contrôle statistique du réglage de la presse et la probabilité de défaut d'une manette ou d'un lot.

Partie 1 : Production

Question sans numéro. La masse X d'une demi-coque supérieure suit une loi normale d'espérance 63 g et d'écart-type 0,45 g. Une pièce est conforme si sa masse est supérieure à 62 g. Calculer la probabilité qu'une demi-coque prise au hasard soit jugée conforme.

La variable centrée réduite est $Z = (X - 63)/0,45$. Ainsi, $P(X > 62) = P(Z > -2,22) = P(Z < 2,22)$, par symétrie de la loi normale centrée réduite. La table donne environ $0,9869$. La probabilité cherchée est donc la probabilité qu'une pièce ait une masse supérieure à 62 g.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X > 62) \approx 0,9869$, soit $98,69\,\%$.

Partie 2 : Contrôle de la conformité

Question 1). Pour le test unilatéral au seuil de 5 %, l'hypothèse alternative est H_1 : m < 63. Donner l'hypothèse nulle H_0.

L'hypothèse alternative $H_1 : m < 63$ correspond à une baisse de la masse moyenne par rapport à la valeur de référence de 63 g. L'hypothèse nulle exprime l'absence de baisse : la moyenne reste égale à cette valeur de référence. C'est cette égalité qui sert de base au calcul de la région de rejet du test.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $H_0 : m = 63$ g.

Question 2). Parmi les trois propositions, recopier la seule réponse exacte indiquant la région de rejet du test sous l'hypothèse nulle. Aucune justification n'est demandée.

Le test est unilatéral à gauche : les valeurs de $\bar{X}$ inférieures au seuil critique appartiennent à la région de rejet. Sur le sujet, la proposition a) donne précisément cette région. Les propositions b) et c) correspondent respectivement à une région à droite et à une région bilatérale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse a) : $]-\infty\,;\,62,926]$.

Question 3). Énoncer la règle de décision du test d'hypothèse au seuil de 5 %.

Au seuil de 5 %, la région de rejet indiquée dans le QCM est $]-\infty\,;\,62,926]$. On compare la moyenne $\bar{X}$ des 100 masses mesurées à cette borne :

1. Si $\bar{X} \leq 62,926$ g, on rejette H_0 et on retient une baisse significative.
2. Sinon, on ne rejette pas H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Rejeter H_0 si $\bar{X} \leq 62,926$ g ; sinon, ne pas rejeter H_0.

Question 4). Un échantillon de 100 demi-coques supérieures a une masse totale de 6 294 g. Au seuil de 5 %, peut-on considérer que la masse moyenne des demi-coques supérieures a baissé ?

La moyenne observée vaut $\bar{x} = 6294/100 = 62,94$ g. Elle est supérieure au seuil critique de 62,926 g, donc elle n'appartient pas à la région de rejet. Au seuil de 5 %, les résultats de cet échantillon ne permettent pas de conclure que la masse moyenne a diminué.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : au seuil de 5 %, on ne peut pas conclure à une baisse de la masse moyenne.

Question 5). Déterminer quelle aurait été la région de rejet si le test unilatéral avait été réalisé au seuil de 1 %.

Pour un test à gauche au seuil de 1 %, la valeur critique réduite est environ $-2,326$. Sous H_0, $\bar{X}$ a pour moyenne 63 g et écart-type 0,045 g. La borne de rejet est donc $63 - 2,326 \times 0,045 = 62,89583$ g, soit 62,896 g au millième près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Région de rejet au seuil de 1 % : environ $]-\infty\,;\,62,896]$ g.

Partie 3 : Assemblage des manettes

Question 1). Les demi-coques supérieures ont 1,3 % de pièces non conformes et les demi-coques inférieures 2 %, et les choix des pièces sont indépendants. Une manette est défectueuse si au moins une de ses deux demi-coques est non conforme. Démontrer que la probabilité qu'une manette soit défectueuse est 0,0327, arrondie au 10^{-4} près.

Une manette est conforme si ses deux demi-coques le sont. Par indépendance, la probabilité de conformité est $(1-0,013)(1-0,02) = 0,987 \times 0,98$. On prend le complément pour obtenir la probabilité qu'au moins une demi-coque soit non conforme : $1 - 0,987 \times 0,98 = 0,03274$. L'arrondi au 10^{-4} près donne la valeur demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'une manette soit défectueuse est $0,0327$, arrondie au 10^{-4} près.

Question 2a). Pour un lot de 50 manettes, la probabilité qu'une manette soit défectueuse est 3,27 %. Justifier que la variable aléatoire Y, qui compte les manettes défectueuses du lot, suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

Chaque manette correspond à une épreuve de Bernoulli, avec pour succès « la manette est défectueuse » et une probabilité $p = 0,0327$. Le choix de 50 manettes est assimilé à un tirage avec remise : les épreuves sont donc indépendantes et ont toutes la même probabilité de succès. La variable Y, qui compte ces succès, suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,0327.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$Y \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,0327)$.

Question 2b). Calculer la probabilité qu'aucune manette du lot de 50 ne soit défectueuse.

Pour qu'aucune des 50 manettes ne soit défectueuse, chacune doit être conforme, avec une probabilité $1 - 0,0327 = 0,9673$. Par indépendance, $P(Y = 0) = 0,9673^{50} \approx 0,1897$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y = 0) \approx 0,1897$, soit environ $18,97\,\%$.

Question 2c). Calculer P(Y ≥ 2), puis interpréter le résultat dans le contexte du lot de manettes.

On utilise l'événement contraire, composé des cas $Y = 0$ et $Y = 1$: $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$. Ainsi, $P(Y \geq 2) = 1 - 0,9673^{50} - 50 \times 0,0327 \times 0,9673^{49} \approx 0,4897$. Cela représente la proportion de lots contenant au moins deux manettes défectueuses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \geq 2) \approx 0,4897$: environ $48,97\,\%$ des lots contiennent au moins deux manettes défectueuses.

Question 2d). Calculer l'espérance E(Y) et expliquer ce que représente cette valeur dans le cadre d'un grand nombre de lots.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np. Ici, $E(Y) = 50 \times 0,0327 = 1,635$. Cette valeur n'est pas un nombre garanti dans chaque lot : elle correspond au nombre moyen de manettes défectueuses par lot lorsqu'on considère un grand nombre de lots de 50 manettes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(Y) = 1,635$ manette défectueuse par lot en moyenne.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2017)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement C1, session 2017, code MATGRC1, d'une durée de 2 heures et de coefficient 2, sauf Innovation textile (coefficient 3). Elle étudie la croissance du volume de bois fort d'un Douglas par ajustement statistique et équation différentielle, puis la production de manettes XS5 par loi normale, test d'hypothèse, indépendance et loi binomiale.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Q = ln(7/V - 1) ; pour retrouver V à partir de Q, on isole V dans cette relation.
- Pour y' + ay = c, la solution générale est la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière constante c/a.
- Pour une variable normale X, standardiser avec Z = (X - μ)/σ avant de calculer une probabilité par rapport à un seuil.
- Pour n essais indépendants de probabilité de défaut p, le nombre de défauts suit B(n,p) et son espérance vaut np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les arrondis demandés et indiquer les unités des volumes, masses et âges.
- Tracer les nuages et courbes sur les annexes prévues, avec des points et repères lisibles.
- Dans un test unilatéral, choisir une région de rejet cohérente avec le sens de l'hypothèse alternative et le seuil.
- Pour le défaut d'une manette, prendre en compte le cas « au moins une pièce non conforme » et l'indépendance.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment retrouver le volume à partir de la valeur prévisible de Q ?

On part de Q = ln(7/V - 1), on applique l'exponentielle, puis on isole V. Il faut utiliser la valeur prévisible de Q obtenue avec la droite d'ajustement et conserver une précision suffisante avant l'arrondi final.

Q : Comment déterminer l'asymptote horizontale du modèle de volume ?

On étudie la limite de V(t) lorsque t tend vers +∞. Dans l'expression donnée, le terme exponentiel tend vers zéro ; la limite est donc l'inverse du terme constant restant au dénominateur.

Q : Comment répartir le temps pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices notés respectivement sur 11 et 9 points. Répartissez le temps en fonction du barème, en réservant un moment pour compléter les annexes et vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Quels éléments vérifier avant de conclure au test d'hypothèse ?

Énoncez H_0 et H_1, repérez la région de rejet correspondant au seuil et au sens unilatéral, puis comparez-y la moyenne observée. Terminez par une conclusion formulée dans le contexte du réglage de la presse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2017/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.