Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2017 • Code sujet : **MATGRD** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5 ou 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Remplissage d’un réservoir et évolution de la quantité d’éthanol (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de la qualité de verres à pied (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2017/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 1-Sujet.pdf

1. Remplissage d’un réservoir et évolution de la quantité d’éthanol

Un réservoir de 10 litres contient initialement 2 litres de concentré de parfum et reçoit de l’éthanol à débit constant, avec agitation permanente. Après le remplissage, un incident entraîne l’évacuation d’un mélange homogène par un trop-plein, situation étudiée par une équation différentielle, une fonction et un algorithme.

Partie A : Étude qualitative du problème

Question 1(a). Vérifier qu’au bout de 150 secondes, le réservoir contient 5 litres de mélange concentré-éthanol.

Le volume initial est de $2\,000$ cm³. En 150 s, l’éthanol ajouté représente $20 \times 150 = 3\,000$ cm³. Le mélange occupe donc $5\,000$ cm³, soit 5 litres.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au bout de 150 s, le réservoir contient 5 L de mélange.

Question 1(b). Déterminer au bout de combien de temps le réservoir est plein.

1. Volume à ajouter : $10\,000 - 2\,000 = 8\,000$ cm³.
2. Temps de remplissage : $8\,000/20 = 400$ s.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le réservoir est plein au bout de 400 s.

Question 2(a). Lorsque le réservoir est plein, la pompe continue à l’alimenter au même débit et le trop-plein évacue chaque seconde 20 cm³ de liquide homogène. Décrire comment varie la quantité Q d’éthanol dans le réservoir en fonction du temps, depuis le début du remplissage, et argumenter.

Pour $0 \leq t \leq 400$, aucun liquide ne s’échappe et $Q(t) = 20t$. Après 400 s, l’éthanol entrant est compensé en partie par celui évacué : le débit de sortie d’éthanol est $20 \times Q/10\,000 = 0{,}002Q$ cm³/s.

- La quantité continue d’augmenter, car $20 - 0{,}002Q > 0$ tant que $Q < 10\,000$.
- Sa croissance ralentit et elle tend vers $10\,000$ cm³.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Q augmente linéairement jusqu’à 400 s, puis de plus en plus lentement vers 10 000 cm³.

Question 2(b). **Parmi les quatre courbes proposées, choisir celle qui représente la quantité Q d'éthanol présente dans le réservoir en fonction du temps, puis justifier le choix. L'axe horizontal représente le temps en secondes et l'axe vertical la quantité Q en cm³.**

La courbe recherchée part de 0, atteint environ 8 000 cm³ à 400 s, puis continue à croître en s'aplatissant vers 10 000 cm³. Parmi les tracés proposés, seule la courbe 3 présente ces caractéristiques.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe 3.

Partie B : Une équation différentielle

Question 1. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée (E_0) : y′ + 0,002y = 0.**

L'équation homogène devient $y' = -0{,}002y$. Ses solutions, sur l'intervalle $[400; +\infty[$, sont les fonctions exponentielles de la forme :

$y(t) = Ce^{-0{,}002t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}002t}$, avec $C \in \mathbb{R}$ et $t \geq 400$.

Question 2. **Déterminer le réel a tel que la fonction constante t ↦ a soit une solution particulière de l'équation (E) : y′ + 0,002y = 20.**

Pour la fonction constante $y(t) = a$, on a $y' = 0$. En substituant dans l'équation, $0{,}002a = 20$, donc $a = 20/0{,}002 = 10\,000$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a = 10\,000$.

Question 3. **En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,002y = 20.**

On ajoute la solution particulière constante $10\,000$ à la solution générale de l'équation homogène. Ainsi, pour $t \geq 400$:

$y(t) = 10\,000 + Ce^{-0{,}002t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 10\,000 + Ce^{-0{,}002t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Déterminer la fonction Q qui répond au problème posé, en tenant compte de la condition Q(400) = 8000.

1. La condition initiale donne $8\,000 = 10\,000 + Ce^{-0{,}8}$, donc $C = -2\,000e^{0{,}8}$.
2. La fonction recherchée est donc $Q(t) = 10\,000 - 2\,000e^{0{,}8}e^{-0{,}002t}$, pour $t \geq 400$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$Q(t) = 10\,000 - 2\,000e^{0{,}8}e^{-0{,}002t}$, pour $t \geq 400$.

Partie C : Étude d'une fonction

Question 1. Pour $Q_1(t) = 10000 - 4451{,}1e^{(-0{,}002t)}$, calculer la limite de Q_1 lorsque t tend vers +∞, puis interpréter ce résultat.

Comme $e^{-0{,}002t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, le terme exponentiel disparaît. La quantité d'éthanol se rapproche donc de la capacité totale du réservoir.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} Q_1(t) = 10\,000$ cm³.

Question 2. Étudier les variations de Q_1 et vérifier mathématiquement le résultat de la partie A, question 2, concernant le moment où le réservoir est plein.

Pour tout $t \geq 400$, $Q_1'(t) = 0{,}002 \times 4\,451{,}1e^{-0{,}002t} > 0$. La fonction est donc strictement croissante.

t	400	$+\infty$
$Q_1'(t)$	+	+
$Q_1(t)$	$\approx 8\,000$	$\nearrow 10\,000$

Le volume total atteint 10 L à 400 s, comme établi en partie A. La valeur de $Q_1(400)$ est approximativement 8 000 cm³, le coefficient de la fonction étant arrondi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le réservoir est plein à 400 s.

Question 3. **Déterminer, à l'unité près et par la méthode de votre choix, une valeur approchée de l'instant où la proportion d'éthanol dans le réservoir vaut 85 %. Décrire la méthode utilisée.**

85 % de la capacité vaut $0{,}85 \times 10\,000 = 8\,500$ cm³. On résout $Q_1(t) = 8\,500$: $e^{-0{,}002t} = 1\,500/4\,451{,}1$, donc $t = -500\ln(1\,500/4\,451{,}1) \approx 543{,}843$. L'arrondi à l'unité donne 544 s.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proportion d'éthanol atteint 85 % vers $t = 544$ s.

Question 4. **Sans justification, choisir l'unique réponse correcte sur la copie au sujet de l'algorithme donné : détermine-t-il la valeur exacte de la solution de $Q_1(t) = A$, une valeur approchée par défaut à 10 près, une valeur approchée par excès à 10 près, ou les solutions de l'inéquation $Q_1(t) > A$ sur $[400 ; +\infty[$?**

L'algorithme augmente T par pas de 10 jusqu'à ce que $Q_1(T) \geq A$. Il affiche ainsi la première valeur de la grille de pas 10 qui atteint ou dépasse la solution de $Q_1(t) = A$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse (c) : une valeur approchée par excès à 10 près.

2. Contrôle de la qualité de verres à pied

L'exercice porte sur des verres à pied dont le calice et le pied, fabriqués par des procédés distincts, peuvent présenter des défauts indépendants. Il étudie aussi la distribution du diamètre du buvant et la durée de fonctionnement d'un dispositif électronique qui contrôle la brillance des verres.

Partie A : Défauts de fabrication

Question 1. Les calices présentent 5 % de défauts et les pieds 2 %, les deux défauts étant indépendants. Calculer la probabilité qu'un verre prélevé au hasard présente les deux défauts.

Les événements A et B sont indépendants. La probabilité qu'ils se produisent simultanément est donc le produit de leurs probabilités : $P(A \cap B) = 0{,}05 \times 0{,}02 = 0{,}001$. En pourcentage, cela représente $0{,}1\%$ des verres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \cap B) = 0{,}001$, soit $0{,}1\%$.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un verre soit défectueux, c'est-à-dire qu'il présente au moins un des deux défauts.

Événement	Probabilité
Calice sans défaut	$0{,}95$
Pied sans défaut	$0{,}98$
Aucun défaut	$0{,}95 \times 0{,}98$

Par complémentarité, la probabilité d'au moins un défaut est $1 - 0{,}95 \times 0{,}98 = 0{,}069$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité d'au moins un défaut : $0{,}069$, soit $6{,}9\%$.

Partie B : Vérification d'un lot

Question 1. On prélève 20 verres dans un stock important, assimilant le prélèvement à un tirage avec remise, et la probabilité qu'un verre soit défectueux est p = 0,069. Justifier que le nombre X de verres défectueux suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

1. Chaque verre constitue une épreuve de Bernoulli, avec une probabilité constante $p = 0{,}069$ d'être défectueux.
2. Le tirage avec remise rend les 20 épreuves indépendantes.
3. La variable X compte le nombre de verres défectueux parmi ces 20 épreuves : elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}069$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}069)$.

Question 2. Calculer à 10^{-2} près la probabilité qu'au moins cinq verres soient défectueux dans un prélèvement de 20 verres.

« Au moins cinq » signifie $X \geq 5$. On utilise l'événement contraire, $X \leq 4$:

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{20}{k} (0{,}069)^k (0{,}931)^{20-k}.$$

Le calcul donne environ $0{,}01009$, que l'on arrondit au centième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(X \geq 5) \approx 0{,}01$ au centième près.

Partie C : Diamètre du buvant du verre

Question 1. Le diamètre D du buvant suit une loi normale de moyenne 46 mm et d'écart-type 0,3 mm. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que le diamètre d'un verre prélevé au hasard soit compris entre 45,8 mm et 46,3 mm.

Borne de D	Valeur centrée réduite
$45{,}8$	$(45{,}8 - 46)/0{,}3 = -2/3$
$46{,}3$	$(46{,}3 - 46)/0{,}3 = 1$

Pour $Z = (D - 46)/0{,}3$, la probabilité cherchée vaut $P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2/3) \approx 0{,}5889$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(45{,}8 \leq D \leq 46{,}3) \approx 0{,}59$.

Question 2. Déterminer, par la méthode de votre choix et à 10^{-1} près, le réel a tel que P(46 − a ≤ D ≤ 46 + a) = 0,95.

Pour une loi normale centrée réduite, l'intervalle central de probabilité $0{,}95$ est approximativement $[-1{,}96\,;1{,}96]$. La demi-largeur cherchée est donc $a = 1{,}96 \times 0{,}3 = 0{,}588$ mm. À 10^{-1} près, cela donne $0{,}6$ mm.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a \approx 0{,}6$ mm.

Partie D : Brillance des verres

Question 1. La durée T de bon fonctionnement du dispositif suit une loi exponentielle de paramètre λ > 0 et P(T ≤ t) = ∫₀ᵗ λe^(−λx) dx. Montrer que P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt).

1. Une primitive de $\lambda e^{-\lambda x}$ est $-e^{-\lambda x}$.
2. En évaluant entre 0 et t, on obtient
$$P(T \leq t) = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} + 1.$$
3. La fonction de répartition est donc celle annoncée pour tout $t \geq 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Question 2. Sachant que P(T ≤ 24) = 0,93, montrer que la valeur de λ arrondie au centième est 0,11.

La formule obtenue donne $1 - e^{-24\lambda} = 0{,}93$, donc $e^{-24\lambda} = 0{,}07$. En prenant le logarithme :
$$\lambda = -\frac{\ln(0{,}07)}{24} \approx 0{,}11080.$$

Le paramètre s'exprime en mois^{-1}, puisque t est mesuré en mois.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda \approx 0{,}11$ mois^{-1} au centième près.

Question 3. Déterminer l'espérance de la durée de bon fonctionnement du dispositif, l'arrondir à l'unité et interpréter le résultat.

Relation	Application
$E(T) = 1/\lambda$	$1/(-\ln(0{,}07)/24) \approx 9{,}025$ mois

L'espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement. Arrondie à l'unité, elle vaut 9 mois.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Durée moyenne de bon fonctionnement : 9 mois.

Question 4. Déterminer si la probabilité que la durée de vie du dispositif soit supérieure à quatre ans est supérieure à 1 %. Justifier la réponse.

Quatre ans correspondent à $4 \times 12 = 48$ mois. La probabilité de survie au-delà de 48 mois est $P(T > 48) = e^{-48\lambda}$. Comme $e^{-24\lambda} = 0{,}07$, on obtient $P(T > 48) = 0{,}07^2 = 0{,}0049$, soit $0{,}49\%$. Cette valeur est inférieure à 1%.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : $P(T > 4 \text{ ans}) = 0{,}49\% < 1\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2017)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement D, session 2017, porte le code MATGRD et dure deux heures. Le coefficient dépend de la spécialité : 1, 1,5 ou 2. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur le remplissage d'un réservoir d'éthanol et le contrôle de verres à pied, avec équations différentielles, fonctions, algorithmes et lois de probabilité.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Pour deux événements indépendants A et B, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Si X suit une loi binomiale B(n,p), alors $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.
- Pour T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $E(T) = 1/\lambda$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier la cohérence des unités : litres, cm^3, secondes et mois.
- Pour un modèle binomial, identifier les essais indépendants, n et p.
- Pour une loi normale, distinguer moyenne et écart-type et traduire correctement l'intervalle demandé.
- Pour l'algorithme, examiner le test d'arrêt et le pas de 10 avant de choisir l'interprétation.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du réservoir ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, dont les solutions sont $Ce^{-0,002t}$. Ajouter une solution constante particulière, puis utiliser $Q(400) = 8000$ pour déterminer la constante et obtenir la fonction qui modélise la quantité d'éthanol.

Q : Comment calculer la probabilité d'au moins cinq verres défectueux ?

Le nombre X de verres défectueux suit B(20 ; 0,069). Utiliser le complément $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$, calculer la somme des probabilités de 0 à 4, puis arrondir le résultat au centième.

Q : Comment gérer les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points, et les parties A à D du second exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartir le temps, commencer par les questions accessibles et garder quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Que faut-il montrer pour justifier les réponses en probabilités ?

Indiquer le modèle et ses paramètres, écrire la probabilité recherchée et présenter la formule utilisée. Justifier explicitement l'indépendance ou l'assimilation à un tirage avec remise lorsque ces hypothèses fondent le calcul.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2017/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.