Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2015 • Code sujet : **MATGRD** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : Analyse de biologie médicale 1 ; Bioanalyse et contrôles 2 ; Biotechnologies 1 ; Industries plastiques « Europlastic » à référentiel commun européen 1,5 ; Métiers de l'eau 1,5 ; Peintures, encres et adhésifs 2 ; Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries 2.**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Pharmacocinétique : évolution de la quantité de principe actif dans le sang** (15 questions) **Page 3**

2. **Industrie agroalimentaire : étiquetage et contrôle de la contenance des flacons** (8 questions) **Page 8**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2015/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2015 - 1-Sujet.pdf

1. Pharmacocinétique : évolution de la quantité de principe actif dans le sang

L'exercice compare deux traitements destinés à freiner une maladie dégénérative de l'œil, en étudiant la quantité de principe actif présente dans le sang au cours du temps. Le premier traitement est modélisé par une fonction et une équation différentielle ; le second est étudié à l'aide de courbes et d'un ajustement statistique de mesures.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Déterminer les solutions sur [0 ; +∞[de l'équation différentielle homogène (E0) : y' + 0,1y = 0.

L'équation se ramène à $y' = -0,1y$. En séparant les variables pour une solution non nulle, on obtient $\frac{y'}{y} = -0,1$, puis $\ln|y| = -0,1t + C_1$. La solution nulle est aussi incluse en choisissant une constante multiplicative nulle. Cette famille est définie sur tout l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,1t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Pour h(t) = 2te^(-0,1t), vérifier que h est une solution particulière de l'équation (E) : y' + 0,1y = 2e^(-0,1t).

La dérivée du produit est $h'(t) = (2 - 0,2t)e^{-0,1t}$. D'autre part, $0,1h(t) = 0,2te^{-0,1t}$. Les termes en t s'annulent dans la somme : $h'(t) + 0,1h(t) = 2e^{-0,1t}$. On retrouve bien le second membre de (E), ce qui vérifie que h en est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h(t) = 2te^{-0,1t}$ est une solution particulière de (E).

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur [0 ; +∞[.

On ajoute à la solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

1. Solution particulière : $2te^{-0,1t}$.
2. Solution homogène : $Ce^{-0,1t}$.

La constante C est réelle et arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = (2t + C)e^{-0,1t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Déterminer la solution de (E) correspondant à la situation décrite, où la quantité initiale de principe actif est de 1 mg à t = 0.**

La condition initiale est $y(0) = 1$. Dans la solution générale, $y(0) = (2 \times 0 + C)e^0 = C$, donc $C = 1$. En remplaçant cette constante, on obtient la quantité de principe actif en fonction du temps, exprimée en heures, et en milligrammes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = (2t + 1)e^{-0,1t}$ mg.

Partie A - Étude d'une fonction

Question 2.a. **Pour f(t) = (2t + 1)e^(-0,1t), interpréter graphiquement la limite de f en +∞, donnée comme égale à 0.**

La limite nulle signifie que les ordonnées de la courbe se rapprochent de zéro lorsque t augmente indéfiniment. Graphiquement, la courbe se rapproche donc de l'axe horizontal, qui est l'axe des abscisses. La droite d'équation $y = 0$ est ainsi une asymptote horizontale en $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est une asymptote horizontale en $+\infty$.

Question 2.b.i. **Sachant que f'(t) = (1,9 - 0,2t)e^(-0,1t), étudier le signe de f'(t) sur [0 ; +∞[.**

Comme $e^{-0,1t} > 0$ sur $[0; +\infty[$, le signe de $f'(t)$ est celui de $1,9 - 0,2t$. Ce facteur s'annule pour $t = 1,9/0,2 = 9,5$.

- $f'(t) > 0$ sur $[0; 9,5[$.
- $f'(9,5) = 0$.
- $f'(t) < 0$ sur $]9,5; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f' est positive avant 9,5, nulle en 9,5, puis négative.

Question 2.b.ii. **Dresser le tableau des variations de f sur [0 ; +∞[.**

Le signe de la dérivée montre que la fonction croît jusqu'à 9,5, puis décroît. De plus, $f(0) = 1$, $f(9,5) = 20e^{-0,95} \approx 7,73$, et la limite en $+\infty$ vaut 0.

t	**0**	**9,5**	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	1 ↗	$20e^{-0,95} \approx 7,73$	↘ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f croît de 1 à environ 7,73, puis décroît vers 0.

Partie A - Application

Question 3.a. Déterminer au bout de combien de temps la quantité de principe actif dans le sang sera maximale.

La quantité atteint son maximum au point où sa dérivée s'annule en passant du positif au négatif. D'après l'étude du signe, cela se produit lorsque $1,9 - 0,2t = 0$. On obtient $t = 1,9/0,2 = 9,5$. Le maximum est donc atteint après neuf heures et demie.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La quantité est maximale au bout de 9,5 heures.

Question 3.b. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel le médicament sera efficace. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Il faut résoudre $(2t + 1)e^{-0,1t} \geq 5$. La fonction croît jusqu'à 9,5 h, puis décroît, et son maximum dépasse 5 mg. Le seuil est donc franchi deux fois. La résolution numérique de $(2t + 1)e^{-0,1t} = 5$ donne environ 2,81 h et 21,95 h. La quantité reste au moins égale à 5 mg entre ces instants.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le médicament est efficace approximativement de 2,81 h à 21,95 h.

Question 3.c. En utilisant l'égalité donnée ∫₀²⁴ f(t)dt = 210 - 690e^(-2,4), déterminer la quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 heures, arrondie au dixième.

La quantité moyenne sur 24 h est l'intégrale de f divisée par 24. Avec la valeur donnée, $\overline{f} = \frac{210 - 690e^{-2,4}}{24} \approx 6,1419$ mg. L'arrondi au dixième donne la moyenne demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Quantité moyenne : 6,1 mg.

Partie B - Administrations répétées du médicament

Question 1. Une dose de 1,8 mg est réinjectée toutes les heures. Parmi les trois courbes proposées, choisir celle qui représente le mieux l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang et argumenter le choix.

La réinjection produit une hausse brusque de 1,8 mg, puis la quantité diminue progressivement entre les injections, à mesure que le médicament est éliminé. Ce phénomène se répète toutes les heures. Sur les courbes du sujet, seule la figure 3 représente ces augmentations répétées suivies d'une diminution entre deux doses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Figure 3 : hausse à chaque injection, puis diminution entre les doses.

Partie B - Administration continue : recherche de la courbe de tendance

Question 2.a.i. En posant yi = ln(36 - qi), compléter les trois valeurs manquantes du tableau pour t = 8, 12 et 24 heures, en arrondissant au centième.

On applique $y_i = \ln(36 - q_i)$ aux quantités indiquées. Les trois écarts à 36 mg sont $20,5$, $15,8$ et $7,3$ mg.

t_i (h)	8	12	24
y_i	3,02	2,76	1,99

Les logarithmes sont arrondis au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $t = 8, 12, 24$ h : $y_i = 3,02;\ 2,76;\ 1,99$.

Question 2.a.ii. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés, à partir des mesures du tableau, et arrondir les coefficients au centième.

La régression linéaire porte sur les sept couples (t_i, y_i), avec $y_i = \ln(36 - q_i)$. Elle donne une pente d'environ $-0,06482$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,53590$. Après arrondissement de chaque coefficient au centième, on obtient l'équation de la droite d'ajustement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = -0,06t + 3,54$.

Question 2.b. À partir de l'ajustement affine de y en t et de la relation yi = ln(36 - qi), donner une expression de la quantité q en fonction du temps t.

On a $y = \ln(36 - q)$ et l'ajustement donne $y = -0,06t + 3,54$. En exponentiant, $36 - q = e^{3,54-0,06t}$. On isole ensuite q pour obtenir son expression en fonction du temps t, exprimé en heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $q(t) = 36 - e^{3,54-0,06t}$ mg.

Question 2.c. En admettant que la quantité limite soit de 36 mg, fournir un argument permettant de justifier l'affirmation du médecin selon laquelle l'état stationnaire, défini par un écart à la quantité limite inférieur ou égal à 1 mg, est atteint en moins de trois jours. Toute trace de recherche est prise en compte dans l'évaluation.

Le modèle donne l'écart à la limite : $36 - q(t) = e^{3,54-0,06t}$. Pour atteindre l'état stationnaire, cet écart doit être inférieur ou égal à 1 mg.

1. $e^{3,54-0,06t} \leq 1$.
2. Donc $3,54 - 0,06t \leq 0$, soit $t \geq 59$ h.

Trois jours correspondent à 72 h.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le modèle prévoit l'état stationnaire à partir de 59 h, avant 72 h (3 jours).

2. Industrie agroalimentaire : étiquetage et contrôle de la contenance des flacons

L'entreprise Flavornuts conditionne ses arômes naturels dans des flacons de 58 mL fournis par Verremballage. L'exercice porte sur les probabilités de défauts d'étiquetage, la conformité des volumes selon une loi normale et un test bilatéral de la moyenne d'un lot de flacons.

Partie A - Étiquetage

Question 1. Les événements A, absence de date limite de consommation, et D, défaut du visuel, sont indépendants, avec p(A) = 0,01 et p(D) = 0,03. Calculer la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard présente les deux défauts.

Les événements A et D sont indépendants. La probabilité qu'ils se réalisent simultanément est donc le produit de leurs probabilités : $p(A \cap D) = p(A) \times p(D) = 0,01 \times 0,03 = 0,0003$. On obtient ainsi la probabilité qu'une étiquette présente à la fois l'absence de date limite de consommation et un défaut du visuel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $p(A \cap D) = 0,0003$, soit $0,03\,\%$.

Question 2. Calculer la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard ne présente aucun de ces deux défauts.

Ne présenter aucun défaut signifie que ni A ni D ne se réalise. Les événements étant indépendants, leurs événements contraires le sont également. On multiplie donc les probabilités de l'absence de chacun des défauts :

$p(\overline{A} \cap \overline{D}) = (1 - p(A))(1 - p(D)) = (1 - 0,01)(1 - 0,03) = 0,9603$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité de ne présenter aucun défaut est $0,9603$, soit $96,03\,\%$.

Partie B - Étude de la contenance

Question 1. Le volume utile V suit une loi normale de moyenne 58 mL et d'écart type 0,04 mL. Un flacon est conforme si son volume appartient à [57,90 ; 58,10]. Déterminer la probabilité qu'un flacon choisi au hasard soit non conforme, en arrondissant si nécessaire au 10^{-2} près.

La loi de V est centrée en 58 mL et son écart type vaut 0,04 mL. Les bornes de conformité, 57,90 et 58,10, sont à 0,10 mL de la moyenne, soit $0,10/0,04 = 2,5$ écarts types. En posant Z la variable normale centrée réduite, la probabilité recherchée est donc $P(Z < -2,5) + P(Z > 2,5) = 2(1 - \Phi(2,5))$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité de non-conformité : $0,0124$, soit $0,01$ au centième près.

Question 2. Donner une valeur arrondie au centième du réel h tel que p(58 - h ≤ V ≤ 58 + h) = 0,95. Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.

1. La loi étant centrée en 58, l'intervalle demandé est symétrique autour de cette moyenne. Pour contenir 95 % des valeurs, il faut placer 2,5 % dans chaque queue de la loi normale centrée réduite.
2. Le quantile correspondant est environ 1,96, donc $h = 1,96 \times 0,04 = 0,0784$ mL. On arrondit ce résultat au centième comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,08$ mL.

Partie C - Test d'hypothèse

Question 1. À partir des effectifs des cinq classes de volumes d'un échantillon de 80 flacons, calculer la moyenne $\bar{v}$ et l'écart type s de l'échantillon, au 10^{-3} près, en assimilant les valeurs observées aux centres des classes.

Les centres des classes sont 57,95 ; 57,99 ; 58,03 ; 58,07 et 58,11 mL. On calcule la moyenne pondérée par les effectifs, puis l'écart type descriptif avec le diviseur 80, en utilisant ces centres comme valeurs observées.

Grandeur	Calcul	Valeur arrondie
Moyenne	$(2 \times 57,95 + 10 \times 57,99 + 39 \times 58,03 + 21 \times 58,07 + 8 \times 58,11)/80$	58,042 mL
Écart type	$\sqrt{\sum n_i (c_i - 58,0415)^2 / 80}$	0,036 mL

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{v} = 58,042$ mL et $s = 0,036$ mL.

Partie C - Construction du test

Question 2.a. Pour le test bilatéral au seuil de signification de 5 % de H0 : μ = 58 contre H1 : μ ≠ 58, choisir parmi les intervalles I, J, K et L celui qui convient. Sous H0, la moyenne d'échantillon suit une loi normale de moyenne 58 et d'écart type 0,04/√80. Justifier le choix.

Le test est bilatéral au seuil de 5 % : les 5 % de risque sont répartis entre les deux extrémités, soit 2,5 % dans chacune. Le quantile de la loi normale centrée réduite est alors environ 1,96. L'intervalle est centré sur la moyenne prévue par H_0, soit 58, et sa demi-largeur vaut $1,96 \times 0,04/\sqrt{80}$. L'intervalle adapté est donc L.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Choix : $L = [58 - 1,96 \times 0,04/\sqrt{80}\ ;\ 58 + 1,96 \times 0,04/\sqrt{80}]$.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test.

On compare la moyenne observée $\bar{v}$ à l'intervalle d'acceptation L, construit sous l'hypothèse nulle. Pour le test bilatéral au seuil de 5 %, la règle est :

- si $\bar{v} \in L$, on ne rejette pas H_0 ;
- si $\bar{v} \notin L$, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $\bar{v} \in L$; sinon, rejeter H_0.

Partie C - Utilisation du test

Question 3. En utilisant les informations recueillies sur l'échantillon de 80 flacons, indiquer si le service de contrôle acceptera la livraison et justifier la réponse.

La moyenne calculée à partir des effectifs est $\bar{v} = 58,0415$ mL. L'intervalle L a pour bornes $58 - 1,96 \times 0,04/\sqrt{80} \approx 57,9912$ et $58 + 1,96 \times 0,04/\sqrt{80} \approx 58,0088$. Comme la moyenne observée dépasse la borne supérieure, elle n'appartient pas à L. Le test conduit donc à rejeter H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Livraison refusée : $58,0415 \notin [57,9912\ ;\ 58,0088]$, donc H_0 est rejetée.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2015)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement D, session 2015, code MATGRD, d'une durée de 2 heures ; le coefficient dépend de la spécialité. Les deux exercices étudient la pharmacocinétique de traitements puis le contrôle qualité d'étiquettes et de flacons agroalimentaires. Les compétences évaluées incluent équations différentielles, étude de fonctions, ajustement statistique, probabilités, loi normale et test bilatéral d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = Ce^(-at).
- Pour une loi normale centrée en μ, une probabilité d'intervalle symétrique se détermine à l'aide des quantiles de la loi normale centrée réduite.
- Un ajustement affine de y = ln(L - q) conduit à un modèle exponentiel de q en fonction du temps.
- Dans un test bilatéral au seuil de 5 %, la région centrale d'acceptation utilise les quantiles -1,96 et 1,96 de la loi normale centrée réduite.

Points de vigilance & attentes du jury

- Préciser le signe de l'exponentielle avant d'étudier le signe d'une dérivée et respecter l'intervalle de définition.
- Distinguer la quantité maximale du temps pendant lequel le médicament est efficace.
- Vérifier le changement de variable yi = ln(36 - qi) et ne pas confondre les valeurs transformées avec les quantités mesurées.
- Pour le test bilatéral, centrer l'intervalle sur 58 mL et utiliser l'écart type de la moyenne, 0,04/√80.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment retrouver la solution de l'équation différentielle du premier traitement ?

On résout d'abord l'équation homogène y' + 0,1y = 0, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale y(0) = 1 permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment passer de l'ajustement de y à une expression de la quantité q ?

On utilise y = ln(36 - q). Si l'ajustement donne y = at + b, alors 36 - q = e^(at+b), donc q = 36 - e^(at+b). Il faut conserver les coefficients arrondis comme demandé.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices, notés respectivement sur 11 et 9 points. Répartissez le temps selon ces poids, prévoyez du temps pour les calculs à la calculatrice et gardez quelques minutes pour vérifier les résultats et les arrondis.

Q : Quel seuil faut-il utiliser pour le test de moyenne bilatéral ?

Au seuil de 5 % pour un test bilatéral, le risque est réparti entre les deux queues de la loi normale. La région centrale est délimitée par les quantiles -1,96 et 1,96, autour de la moyenne imposée par H0.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2015/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2015 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.