Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement D

Session 2014 • Code sujet : **14MATGRD** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5 ou 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Décongélation de viande et réglementation sanitaire (14 questions) **Page 3**

2. Défauts de fabrication et estimation du débit de pompes (9 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2014/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2014 - 1-Sujet.pdf

1. Décongélation de viande et réglementation sanitaire

Une société agroalimentaire étudie la température au cœur de pièces de viande congelées de 2 kg afin de maîtriser leur décongélation et leur qualité gustative. Le sujet mobilise la loi de refroidissement de Newton et un modèle de croissance bactérienne pour évaluer le temps de décongélation et le respect d'un seuil sanitaire.

A : Détermination de la constante k

Question 1. À partir des températures relevées et de la définition $z_i = \ln(5 - \theta_i)$, déterminer les valeurs de z_i pour i de 1 à 6, arrondies au centième.

On remplace chaque température relevée dans la définition $\mathbf{z_i = \ln(5 - \theta_i)}$. Par exemple, pour $\theta_1 = -21$, on calcule ln(26). Les autres arguments du logarithme sont respectivement 10,1 ; 3,9 ; 1,5 ; 0,6 et 0,2. Après arrondi au centième, on obtient :

i	1	2	3	4	5	6
z_i	3,26	2,31	1,36	0,41	−0,51	−1,61

✓ RÉPONSE À RETENIR

(3,26 ; 2,31 ; 1,36 ; 0,41 ; −0,51 ; −1,61).

Question 2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine de z en t sous la forme z = at + b. Arrondir a et b au centième.

Pour les six couples relevés, la moyenne des temps vaut 12,5 et la somme des carrés des écarts aux temps moyens vaut 437,5. La pente des moindres carrés est donc la somme des produits des écarts divisée par 437,5 : elle vaut environ −0,1929. L'ordonnée à l'origine, obtenue avec la moyenne des z_i, vaut environ 3,2814. On arrondit chacun de ces coefficients au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La droite d'ajustement est z = −0,19t + 3,28.

Question 3. Déduire de l'ajustement affine que, pour t compris entre 0 et 25 heures, la température au cœur de la pièce de viande peut être estimée par $\theta(t) = -26{,}58e^{-0{,}19t} + 5$.

On part de la relation $z = \ln(5 - \theta)$ et de l'ajustement $z = -0{,}19t + 3{,}28$. En exponentiant, on obtient $5 - \theta = e^{3{,}28}e^{-0{,}19t}$. Comme $e^{3{,}28}$ est approximativement égal à 26,58, il suffit d'isoler θ. Cette estimation est valable sur l'intervalle de temps demandé, de 0 à 25 heures.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\theta(t) \approx -26{,}58e^{-0{,}19t} + 5$, pour $0 \leq t \leq 25$.

Question 4. Calculer θ′(t) et θ(t) - 5, puis justifier que le modèle de Newton s'applique dans ce cas et donner les valeurs des constantes k et T.

En dérivant l'exponentielle, on obtient $\theta'(t) = 26{,}58 \times 0{,}19e^{-0{,}19t} = 5{,}0502e^{-0{,}19t}$. D'autre part, $\theta(t) - 5 = -26{,}58e^{-0{,}19t}$. Ainsi, $\theta'(t) = -0{,}19(\theta(t) - 5)$, qui est bien de la forme $\theta'(t) = k(\theta(t) - T)$. On identifie alors les constantes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\theta'(t) = 5{,}0502e^{-0{,}19t}$; $\theta(t) - 5 = -26{,}58e^{-0{,}19t}$; $k = -0{,}19$ et $T = 5$ °C.

B : Durée de décongélation - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a). Déterminer les solutions sur [0 ; +∞[de l'équation différentielle homogène y′ + 0,19y = 0.

L'équation homogène se réécrit $y' = -0{,}19y$. Les solutions non nulles vérifient alors $y'/y = -0{,}19$. En intégrant, on obtient $\ln|y| = -0{,}19t$ + constante, puis une exponentielle multipliée par une constante. La solution nulle est également comprise dans cette famille lorsque la constante multiplicative vaut zéro. On obtient ainsi toutes les solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}19t}$, avec $C \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

Question 1.b). Pour h(t) = c, déterminer le réel c afin que h soit une solution particulière de l'équation différentielle y′ + 0,19y = 0,38.

Si $h(t) = c$ est constante, alors sa dérivée est nulle. En substituant h et h′ dans l'équation complète, il faut donc que $0{,}19c = 0{,}38$. On divise les deux membres par 0,19, qui est non nul. Cette valeur constante fournit une solution particulière de l'équation différentielle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La constante recherchée est $c = 2$.

Question 1.c). Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y′ + 0,19y = 0,38.

Une solution de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant une solution particulière à toute solution de l'équation homogène associée. D'après la question précédente, la solution particulière constante vaut 2. Les solutions homogènes sont de la forme $Ce^{-0{,}19t}$, où C est réel. Leur somme décrit donc l'ensemble des solutions sur l'intervalle [0 ; +∞[.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,19t} + 2$, avec $C \in \mathbb{R}$.

B : Durée de décongélation - Détermination de la fonction θ

Question 2.a). Sachant que θ est solution de l'équation différentielle et que θ(0) = -21, justifier que $\theta(t) = -23e^{-0,19t} + 2$.

La solution générale trouvée précédemment s'écrit $\theta(t) = Ce^{-0,19t} + 2$. À t = 0, l'exponentielle vaut 1. La condition initiale θ(0) = −21 impose donc C + 2 = −21, d'où C = −23. En remplaçant C par cette valeur dans la solution générale, on retrouve l'expression annoncée pour la température au cœur de la viande.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\theta(t) = -23e^{-0,19t} + 2$.

Question 2.b). Déterminer la limite de θ(t) lorsque t tend vers +∞ et interpréter le résultat dans le contexte étudié.

Lorsque t tend vers +∞, l'exponentielle $e^{-0,19t}$ tend vers zéro, car son exposant tend vers −∞. Dans $\theta(t) = -23e^{-0,19t} + 2$, le terme exponentiel disparaît donc à la limite. La température au cœur de la viande se rapproche ainsi de la température constante de la zone du réfrigérateur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite est 2 °C : la viande tend vers la température du réfrigérateur.

B : Durée de décongélation

Question 3.a). Estimer le temps nécessaire pour que les pièces de viande placées dans une zone du réfrigérateur à 2 °C soient décongelées. Indiquer la méthode choisie et les étapes suivies.

La viande est décongelée lorsque sa température atteint 0 °C. On résout donc $-23e^{-0,19t} + 2 = 0$, soit $e^{-0,19t} = 2/23$. En prenant le logarithme, on trouve $t = \ln(23/2)/0,19 \approx 12,85$ heures. La température augmente jusqu'à 2 °C, donc le seuil de 0 °C est atteint à cette durée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Durée estimée : environ 12 h 51 min.

Question 3.b). Déterminer si la viande ainsi décongelée donnera, après cuisson, l'illusion d'un produit frais, sachant que la décongélation doit durer au moins 12 heures.

Le temps estimé pour atteindre le seuil de décongélation est d'environ 12,85 heures. Le critère gustatif annoncé dans le sujet exige une durée d'au moins 12 heures. Comme 12,85 est supérieur à 12, la durée minimale est dépassée. La viande ainsi décongelée satisfait donc, selon le critère donné, la condition pour donner après cuisson l'illusion d'un produit frais.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : 12,85 h dépasse le minimum requis de 12 h.

C : Prise en compte de la réglementation sanitaire - Détermination de la fonction G_0

Question 1.a). Déterminer les primitives G de la fonction $v(t) = 3e^{0,06t}$.

La dérivée de $e^{0,06t}$ est $0,06e^{0,06t}$. Pour obtenir une primitive de $3e^{0,06t}$, on cherche donc un coefficient A tel que $0,06A = 3$. Il vient $A = 3/0,06 = 50$. À cette primitive, il faut ajouter une constante réelle arbitraire, car la dérivée d'une constante est nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les primitives sont $G(t) = 50e^{0,06t} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b). À l'aide de la condition $G_0(0) = 50$, déterminer l'expression de $G_0(t)$ pour t supérieur ou égal à 0.

D'après la question précédente, toute primitive de v s'écrit $G(t) = 50e^{0,06t} + C$. En utilisant $t = 0$, on a $e^0 = 1$, donc $G_0(0) = 50 + C$. La condition initiale impose $G_0(0) = 50$; ainsi, la constante additive est nulle. On obtient l'expression de la concentration pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $G_0(t) = 50e^{0,06t}$, pour $t \geq 0$.

C : Prise en compte de la réglementation sanitaire

Question 2. Un lot termine sa décongélation à 18 h et reste au réfrigérateur à 2 °C jusqu'à sa cuisson le lendemain à 8 h. Déterminer, à l'aide du modèle de concentration bactérienne, si le seuil réglementaire de 100 bactéries par gramme est respecté.

Le lot reste au réfrigérateur de 18 h à 8 h le lendemain, soit pendant 14 heures après la fin de la décongélation. On évalue donc le modèle à t = 14 : $G_0(14) = 50e^{0,06 \times 14} \approx 115,8$ bactéries par gramme. Cette concentration dépasse le seuil fixé à 100 bactéries par gramme. La réglementation n'est donc pas respectée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : environ 115,8 bactéries/g, soit plus que le seuil de 100.

2. Défauts de fabrication et estimation du débit de pompes

Une usine fabrique des pompes de surface pour l'irrigation, avec un débit cible de 6 m³/h et une tolérance de ± 0,25 m³/h. L'étude porte sur les défauts mécaniques et de débit, puis sur l'estimation du débit moyen d'une livraison à partir d'un échantillon.

A : Le défaut mécanique

Question 1. Justifier que le nombre X de pompes présentant un défaut mécanique dans une caisse de 50 suit une loi binomiale, puis préciser les paramètres de cette loi.

Chaque pompe constitue une épreuve de Bernoulli, avec une probabilité constante $p = 0{,}01$ de défaut. Les 50 prélèvements sont indépendants puisqu'ils sont assimilés à un tirage avec remise. La variable X, qui compte les pompes défectueuses, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}01$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre de pompes présentant un défaut mécanique dans une caisse suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}01)$.

Question 2.a). Calculer la probabilité qu'une caisse contienne une pompe présentant un défaut mécanique, puis arrondir le résultat au millième.

« Une pompe présentant un défaut » signifie ici exactement une pompe défectueuse. Pour une loi binomiale, $P(X = 1) = \binom{50}{1} \times 0{,}01 \times 0{,}99^{49} = 0{,}3055586\ldots$. L'arrondi au millième est donc $0{,}306$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'une caisse contienne exactement une pompe défectueuse est $0{,}306$, au millième.

Question 2.b). Calculer la probabilité qu'une caisse contienne au moins deux pompes présentant un défaut mécanique, puis arrondir le résultat au millième.

On calcule le complément de l'événement recherché : une caisse contient au moins deux pompes défectueuses si elle n'en contient ni zéro ni une. Ainsi, $P(X \geq 2) = 1 - 0{,}99^{50} - 50 \times 0{,}01 \times 0{,}99^{49} = 0{,}0894353\ldots$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'une caisse contienne au moins deux pompes défectueuses est $0{,}089$, au millième.

Question 3.a). Déterminer le paramètre λ de la loi de Poisson choisie pour approcher la loi de X, et justifier ce choix.

Pour approcher une loi binomiale par une loi de Poisson, on choisit le paramètre égal à l'espérance de la loi binomiale : $\lambda = np$. Ici, $\lambda = 50 \times 0{,}01 = 0{,}5$. Cette approximation est adaptée car le nombre d'essais est assez grand et la probabilité de défaut est faible.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le paramètre de la loi de Poisson choisie pour l'approximation est $\lambda = 0{,}5$.

Question 3.b). À l'aide d'une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre λ, estimer la probabilité qu'une caisse contienne au moins quatre pompes présentant un défaut mécanique. Arrondir au millième.

1. Avec $Y \sim \mathcal{P}(0{,}5)$, on calcule le complément : $P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3)$.
2. Donc $P(Y \geq 4) = 1 - e^{-0{,}5}\left(1 + 0{,}5 + \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^3}{6}\right) = 0{,}0017516\ldots$, soit $0{,}002$ au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité estimée qu'une caisse contienne au moins quatre pompes défectueuses est $0{,}002$, au millième.

B : Le défaut de débit

Question Calcul. Une pompe est conforme si son débit est compris entre 5,75 et 6,25 m³/h. Sachant que le débit Z suit une loi normale de moyenne 6 m³/h et d'écart type 0,15 m³/h, calculer la probabilité qu'une pompe présente un défaut de débit. Arrondir au millième.

Un défaut correspond à un débit inférieur à $5{,}75$ ou supérieur à $6{,}25$. La loi est centrée en 6, donc les deux probabilités de dépassement sont égales. La borne réduite vaut $z = (6{,}25 - 6)/0{,}15 = 1{,}6667$. Ainsi, $P(\text{défaut}) = 2[1 - \Phi(1{,}6667)] \approx 0{,}09558$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'une pompe présente un défaut de débit est $0{,}096$, au millième.

C : Estimation du débit moyen des pompes d'une livraison

Question 1. À partir du tableau des débits mesurés et de leurs effectifs, calculer la moyenne et l'écart type de la série. Arrondir l'écart type au millième.

Grandeur	Calcul	Valeur
Effectif total	Somme des effectifs	50
Moyenne	$296{,}6/50$	$5{,}932$
Écart type	$\sqrt{1{,}3088/50}$	$0{,}162$

L'écart type est calculé pour la série complète, avec division par l'effectif total.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Moyenne : $5{,}932\ \mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$. Écart type : $0{,}162\ \mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$, au millième.

Question 2.a). Sachant que la moyenne X d'un échantillon de 50 pompes suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type 0,16/√50, déterminer a tel que P(μ - a ≤ X ≤ μ + a) = 0,95. Donner une valeur approchée de a au millième par excès.

1. Pour une probabilité centrale de $0{,}95$, le quantile de la loi normale centrée réduite est $1{,}96$.
2. Ainsi, $a = 1{,}96 \times \frac{0{,}16}{\sqrt{50}} = 0{,}0443497\ldots$.
3. L'arrondi au millième par excès donne $0{,}045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur recherchée, arrondie au millième par excès, est $a = 0{,}045\ \mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$.

Question 2.b). Donner un intervalle de confiance de la moyenne μ des débits des pompes livrées avec un coefficient de confiance supérieur ou égal à 95 %.

La moyenne mesurée sur l'échantillon est $\overline{x} = 5{,}932\ \mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$. On utilise la marge $0{,}045$, arrondie par excès à la question précédente. L'intervalle centré sur cette moyenne est donc $[5{,}932 - 0{,}045\,;\ 5{,}932 + 0{,}045]$. La marge arrondie par excès garantit un niveau de confiance au moins égal à 95 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Un intervalle de confiance de niveau au moins 95 % est $[5{,}887\,;\ 5{,}977]\ \mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2014)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement D, session 2014, code 14MATGRD, d'une durée de 2 heures, avec un coefficient de 1, 1,5 ou 2 selon la spécialité. Le sujet étudie la décongélation de viande, le risque bactérien et le contrôle de pompes. Il évalue l'ajustement affine, les équations différentielles, les primitives, les probabilités, les statistiques et l'intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Dans $\theta' = k(\theta - T)$, une constante k négative conduit à une température qui tend vers T lorsque le temps augmente.
- Les solutions de $y' + ay = b$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.
- Le nombre de défauts sur n essais indépendants de probabilité p suit une loi binomiale B(n,p) ; l'approximation de Poisson utilise $\lambda = np$.
- Pour une moyenne d'échantillon, la marge de confiance dépend de l'écart type de la moyenne et du niveau de confiance retenu.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les arrondis demandés : au centième, au millième ou au millième par excès selon la question.
- Vérifier les unités et exprimer les durées en heures avant de les comparer aux résultats des modèles.
- Pour les probabilités, préciser l'événement étudié et faire apparaître les étapes, même avec une calculatrice ou le formulaire.
- Interpréter les résultats dans leur contexte : décongélation, seuil bactérien ou conformité du débit.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer le temps de décongélation avec la fonction θ ?

On cherche l'instant où la température au cœur atteint 0 °C. Il faut résoudre $\theta(t) = 0$, ou utiliser une méthode graphique ou numérique, puis comparer la durée obtenue au minimum de 12 heures requis pour l'illusion du produit frais.

Q : Comment choisir la loi pour le nombre de pompes mécaniquement défectueuses ?

Le nombre de défauts dans une caisse de 50 suit une loi binomiale, car les essais sont indépendants et la probabilité de défaut est constante. L'approximation de Poisson utilise $\lambda = np$, soit $50 \times 0{,}01$.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

Le sujet comprend deux exercices de 10 points, chacun avec des parties indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, montrez les étapes des calculs, puis gardez quelques minutes pour vérifier les résultats, les arrondis et les unités.

Q : Qu'attend le jury dans la présentation des résultats ?

Le sujet insiste sur la clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction. Justifiez les choix de modèles, précisez les paramètres des lois, présentez les étapes de calcul, respectez les arrondis et interprétez les résultats dans leur contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgpme.fr/assets/annales/bts-gpme/E2 - Mathématiques/2014/BTS GPME - E2 - Mathématiques - Session 2014 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion de la PME : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.